درخت دانش

تابع

فصل سوم

صفحه‌های ۴۷ تا ۷۰ کتاب درسی

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.

آبی: مسلطم

سبز: نسبتاً مسلطم

زرد: مسلط نیستم.

گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

تابع

۵۲ سؤال امتحانی شامل:

۳۲ سؤال از مدارس و امتحان نهایی

۲۰ سؤال طراحی شده از کتاب درسی

۱. آشنایی با برخی از انواع توابع (۱۸ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶ کتاب درسی

	تعداد سؤال
توابع گویا	۳
توابع رادیکالی	۳
تساوی دو تابع	۵
توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح	۷

۲. وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک (۲۰ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴ کتاب درسی

	تعداد سؤال
وارون یک تابع	٤
تابع یک‌به‌یک	۱۰
یافتن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت	۶

۳. اعمال جبری روی توابع (۱۴ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

صفحه‌های ۶۵ تا ۷۰ کتاب درسی

	تعداد سؤال
نمایش ضابطه‌ای نمایش زوج مرتبی نمایش نموداری	١٤

۱. آشنایی با برخی از انواع توابع

گزینش، چیدمان و طراحی سؤال‌های این فصل: میثم حمزه‌لویی - فرزانه دانائی

صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶ کتاب درسی

توابع گویا

مرجع

۱۲۹. در تابع گویای $y=\frac{۳x+۴}{۲x-۸}$:

الف) دامنه‌ی تابع را مشخص کنید.

ب) به ازای چه مقداری از x مقدار تابع برابر با ۶ می‌شود؟

(صفحه‌ی ۵۶ ـ مکمل و مشابه تمرین ۲)

شهرضا ـ شاهد رجایی ـ دی ۹۴
(۴ تکرار)

۱۳۰. دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x}{x^۲-۴}$

ب) $f(x)=\frac{x+۵}{x^۲-۲x+۳}$

پ) $f(x)=\frac{x+۵}{x^۲-۴x+۴}$

(صفحه‌ی ۵۶ ـ مکمل تمرین ۲ و صفحه‌ی ۵۰ ـ مکمل کار در کلاس)

الف) امتحان نهایی ـ شهریور ۹۱
ب) امتحان نهایی ـ دی ۸۷
پ) امتحان نهایی ـ خرداد ۹۲
(۷ تکرار)

۱۳۱. نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.

الف) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

ب) $D_f=(-\infty,۰)$

پ) $D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$

(صفحه‌ی ۵۶ ـ مشابه تمرین ۱ و صفحه‌ی ۴۹ـ مشابه فعالیت)

توابع رادیکالی

۱۳۲. دامنه‌ی توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{۲x+۴}+۳$

ب) $g(x)=\sqrt{۱۲-۶x}$

پ) $p(x)=\sqrt{۱۶-x^۲}$

(صفحه‌ی ۵۳ ـ فعالیت ـ مکمل و مشابه ۱)

الف) شهریار ـ برهان ـ دی ۹۴
ب) خوی ـ شاهد امام حسین ـ دی ۹۴
پ) بوکان ـ سبحان ـ خرداد ۹۴
(۵ تکرار)

۱۳۳. دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۵x+۶}$ را به کمک تعیین علامت بیابید.

(صفحه‌ی ۵۳ ـ فعالیت ـ مکمل ۱)

کهنوج ـ امام خمینی ـ دی ۹۴
(۱۰ تکرار)

۱۳۴. با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt{x}+۲$

ب) $y=\sqrt{x-۱}$

پ) $y=۲+\sqrt{x+۱}$

(صفحه‌ی ۵۳ ـ فعالیت ـ مشابه ۱ و ۲)

الف و ب) طراحی شده
پ) شیروان ـ شاهد ۵ ـ خرداد ۹۴
(۱۰ تکرار)

تساوی دو تابع

۱۳۵. اگر دو تابع $f=\{(۵,۳),(-۳,۵)\}$ و $g=\{(b,c),(۵,a),(b,۵)\}$ مساوی باشند، a، b و c را بیابید.

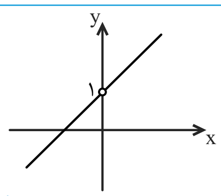
(صفحه‌ی ۵۰ ـ مرتبط با متن درس)

اصفهان ـ نیلفروش‌زاده ـ دی ۹۵
(۴ تکرار)

۱۳۶. نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟

الف) $f(x)=x+۱$ و $x\neq۰$

ب) $g(x)=\frac{x^۲-x}{x-۱}$



(صفحه‌ی ۵۰ ـ کار در کلاس ـ مشابه ۲)

فصل سوم

مرجع

۱۳۷. نمودار هریک از توابع را رسم کنید. آیا دو تابع مساوی هستند؟

الف) $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x+۱}$ ب) $g(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x-۲}$

(صفحه‌ی ۵۱ ـ کار در کلاس ـ مشابه ۱)

۱۳۸. کدام جفت از توابع زیر برابر هستند؟

الف) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳} \\ g(x)=x+۳ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+۱}{|x+۱|} \\ g(x)=\dfrac{|x+۱|}{x+۱} \end{cases}$

(صفحه‌ی ۵۶ ـ مشابه تمرین ۳)

۱۳۹. آیا دو تابع زیر با هم مساویند؟ چرا؟

امتحان نهایی ـ خرداد ۹۲ **(۱۰ تکرار)**

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۲۵}{x-۵} & x\neq ۵ \\ ۶ & x=۵ \end{cases}$ و $g(x)=x+۵$

(صفحه‌ی ۵۶ ـ مشابه تمرین ۳)

توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

۱۴۰. مقدار هریک از جزء صحیح‌های زیر را بیابید.

الف) $[۲/۷]$ ب) $[\pi+\dfrac{۱}{۲}]$

پ) $[-\dfrac{۸۲}{۱۵}]$ ت) $[-۳\sqrt{۵}]$

(صفحه‌ی ۵۵ ـ مشابه کار در کلاس)

۱۴۱. جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

الف) امتحان نهایی ـ دی ۹۴
ب) امتحان نهایی ـ خرداد ۹۳
پ) امتحان نهایی ـ دی ۹۲
(۸ تکرار)

الف) اگر $f(x)=[x+۱]$ باشد، حاصل $f(\sqrt{۳}-۱)$ برابر با .... است.

ب) اگر $f(x)=[x+۳]$ باشد، در این صورت حاصل $f(۲-\sqrt{۲})$ برابر .... است.

پ) مقدار تابع $f(x)=[x+۱]$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ .... می‌باشد.

(صفحه‌ی ۵۵ ـ فعالیت ـ نتیجه‌ی ۳)

۱۴۲. حاصل $[\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}]+\cdots+[\sqrt{۱۳}]$ را بیابید.

مشهد ـ امام رضا (ع) ـ دی ۹۵ **(۵ تکرار)**

(صفحه‌ی ۵۵ ـ مشابه کار در کلاس)

۱۴۳. نمودار تابع $y=[x]+۲$ را در بازه‌ی $[-۱,۲)$ رسم کنید.

امتحان نهایی ـ شهریور ۹۱ **(۹ تکرار)**

(صفحه‌ی ۵۶ ـ مشابه تمرین ۸)

۱۴۴. نمودار تابع $y=[x+۱]$ را در بازه‌ی $[-۲,۱)$ رسم کنید.

ارومیه ـ رحیمی افشار ـ دی ۹۵ **(۶ تکرار)**

(صفحه‌ی ۵۶ ـ مشابه تمرین ۸)

۱۴۵. در هریک از تساوی‌های زیر حدود x را بیابید.

الف) $[x]=۳$ ب) $[x+۲]=-۱$

(صفحه‌ی ۵۵ ـ فعالیت ـ مشابه ۱ و ۳)

۱۴۶. کرایه‌ی اولیه (ورودی) تاکسی‌های یک شرکت تاکسیرانی برای ۲ کیلومتر اول ۳۰۰۰ تومان است و برای هر کیلومتر مسافت بعدی و کمتر از آن، مبلغ ۲۰۰۰ تومان کرایه اضافی دریافت می‌شود. اگر حداکثر مسافت ۵ کیلومتر باشد، تابعی که مبلغ کرایه را برای همه‌ی مسافت‌ها نمایش می‌دهد را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

(صفحه‌ی ۵۴ ـ مشابه فعالیت)

۲. وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴ کتاب درسی

وارون یک تابع

مرجع

۱۴۷. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) نمودار f و f^{-1} نسبت به محور xها قرینه‌اند.

ب) وارون تابع $f=\{(1,2),(0,1),(2,\sqrt{4})\}$ یک تابع است.

پ) اگر $(a,b)\in f$ آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$

ت) وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است.

(صفحه‌ی ۵۸ ـ مشابه فعالیت)

۱۴۸. اگر $f=\{(-1,2),(0,3),(4,-1)\}$ باشد، تابع f^{-1} را بیابید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

(صفحه‌ی ۶۳ ـ مشابه تمرین ۱)

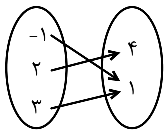
۱۴۹. تابع $f=\{(m^4+2,5),(n^3+1,4)\}$ مفروض است. m و n را طوری تعیین کنید که برد وارون f، $\{-7,18\}$ باشد.

(صفحه‌ی ۶۳ ـ مکمل تمرین ۱)

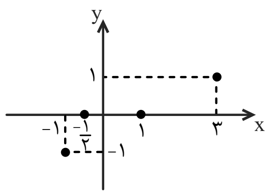
شهریار ـ عزیزاله پزشکی ـ دی ۹۴
(۴ تکرار)

۱۵۰. نمودار وارون هریک از توابع زیر را رسم کنید.

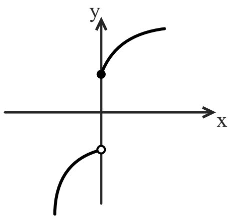
الف)



ب)



پ)



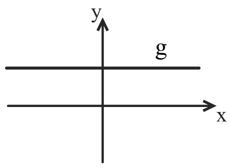
(صفحه‌ی ۶۳ ـ مکمل تمرین ۲)

تابع یک‌به‌یک

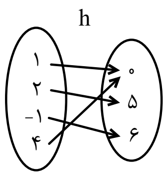
۱۵۱. کدام‌یک از موارد زیر یک تابع یک‌به‌یک را مشخص می‌کند؟

الف) $f=\{(-2,3),(0,-5),(1,7),(4,3)\}$

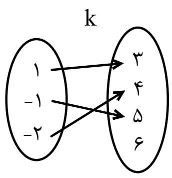
ب)



پ)



ت)



(الف، پ، ت : صفحه‌ی ۵۹ ـ مشابه فعالیت)
(ب : صفحه‌ی ۶۰ ـ مشابه فعالیت)

الف، ب) دزفول ـ کوثر ـ دی ۹۴
(۵ تکرار)
پ، ت) طراحی شده

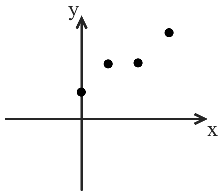
فصل سوم

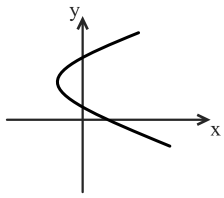
مرجع

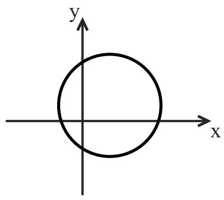
۱۵۲. مقادیر a و b را طوری بیابید که رابطه‌ی $f=\{(a,۲),(-۱,۱),(۰,۲),(a-۱,b)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد.
(صفحه‌ی ۵۹ ـ فعالیت ـ مشابه ۱)

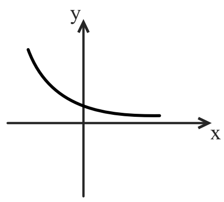
۱۵۳. a و b را طوری به‌دست آورید که رابطه‌ی $R=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد.
(صفحه‌ی ۵۹ ـ فعالیت ـ مشابه ۱)
مرجع: شهریار ـ عزیزاله پزشکی ـ دی ۹۴ **(۱۶ تکرار)**

۱۵۴. کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع یک‌به‌یک را نمایش می‌دهد؟

الف)


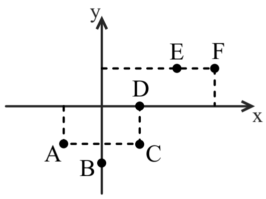
ب)


پ)


ت)


(صفحه‌ی ۶۰ ـ فعالیت ـ مشابه ۲)

۱۵۵. الف) با توجه به نمودار مقابل، آیا تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟
ب) با حذف حداقل چند نقطه از نمودار ،تابع یک‌به‌یک خواهد شد؟ نقاط را مشخص کنید.



(صفحه‌ی ۶۳ ـ کار در کلاس اول ـ مشابه ۲)

۱۵۶. تابعی بنویسید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳\}$ باشد و هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کند:
یک‌به‌یک نباشد و $f(۳)<f(۱)$ باشد.
(صفحه‌ی ۶۴ ـ مکمل تمرین ۵)
مرجع: تهران ـ آبسال ـ دی ۹۴ **(۴ تکرار)**

۱۵۷. نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $(-۵,۱)$ و برد آن $(۰,۴)$ باشد، مشروط بر آنکه:
الف) تابع یک‌به‌یک باشد.
ب) تابع یک‌به‌یک نباشد.
(صفحه‌ی ۶۴ ـ مشابه تمرین ۵)
مرجع: خوی ـ صدیقه کبری ـ دی ۹۴ **(۴ تکرار)**

۱۵۸. تابع خطی $y=۳ax+۱۷-۱۸x$ یک‌به‌یک نیست. مقدار a را تعیین کنید.
(صفحه‌ی ۶۳ ـ کار در کلاس اول ـ مرتبط با ۲)
مرجع: بهبهان ـ رسول اکرم ـ دی ۹۴ **(۵ تکرار)**

۱۵۹. آیا تابع $f(x)=x^۲-۲x$ یک‌به‌یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.
(صفحه‌ی ۶۳ ـ مشابه کار در کلاس دوم)
مرجع: امتحان نهایی ـ خرداد ۹۳ **(۷ تکرار)**

۱۶۰. تابع‌های زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید یک‌به‌یک نیستند. در هر مورد بازه‌ای دلخواه مثال بزنید که با محدود کردن دامنه‌ی تابع به آن، یک تابع یک‌به‌یک حاصل شود.
الف) $y=|x-۱|$
ب) $y=x^۲-۲x-۱$
(صفحه‌ی ۶۳ ـ مشابه کار در کلاس دوم)

پاسـخ فصـل سوم

پاسخ تشریحی: فرزانه دانایی

۱۲۹. الف) در تابع گویا مخرج کسر مخالف صفر است:

$$y=\frac{۳x+۴}{۲x-۸}$$

$$۲x-۸\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۴ \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{۴\}$$

ب) باید مقداری از x را بیابیم که به ازای آن $y=۶$ می‌شود، داریم:

$$y=\frac{۳x+۴}{۲x-۸}\xrightarrow{y=۶} ۶=\frac{۳x+۴}{۲x-۸}\Rightarrow ۱۲x-۴۸=۳x+۴$$

$$\Rightarrow ۹x=۵۲ \Rightarrow x=\frac{۵۲}{۹}$$

---

۱۳۰. در توابع گویا، مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین:

الف)

$$f(x)=\frac{x}{x^۲-۴}$$

$$x^۲-۴\neq ۰ \Rightarrow x^۲\neq ۴ \Rightarrow x\neq \pm ۲$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۲,+۲\}$$

ب)

$$f(x)=\frac{x+۵}{x^۲-۲x+۳}$$

$$x^۲-۲x+۳\neq ۰$$

$$\Delta=(-۲)^۲-۴(۱)(۳)=۴-۱۲=-۸<۰$$

Δ ی عبارت درجه دو $x^۲-۲x+۳$ منفی و ضریب $x^۲$ مثبت است، پس این عبارت همواره مثبت است و به ازای هیچ x ی صفر نمی‌شود. بنابراین:

$$D_f=R$$

پ)

$$f(x)=\frac{x+۵}{x^۲-۴x+۴}$$

$$x^۲-۴x+۴\neq ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۲$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

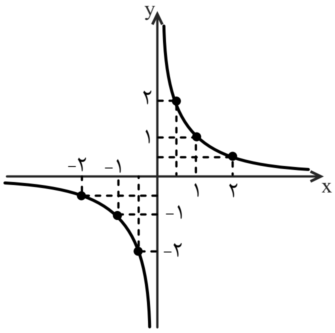
---

۱۳۱. با استفاده از نقطه‌یابی، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم. با توجه به جدول زیر، در تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$، با افزایش مقادیر x، مقادیر تابع کاهش می‌یابد:

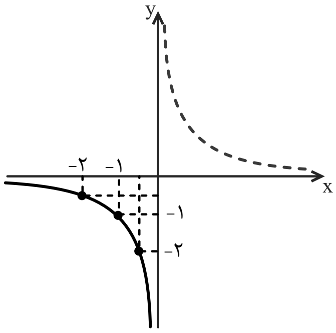
x	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
$f(x)=\frac{۱}{x}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$

برای قسمت‌های (ب) و (پ) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را رسم کرده و آن بخشی از نمودار را که در فاصله‌ی داده شده قرار دارد، نگه داشته و بقیه‌ی نمودار را حذف می‌کنیم.

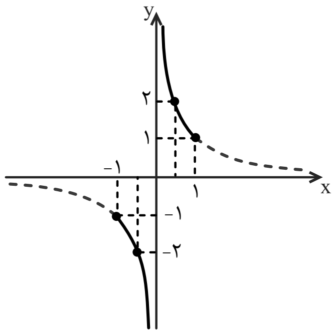
الف) $f(x)=\frac{۱}{x}\quad ,\quad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$



ب) $f(x)=\frac{۱}{x}\quad ,\quad D_f=(-\infty,۰)$



پ) $f(x)=\frac{۱}{x}\quad ,\quad D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$



---

۱۳۲. عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، باید نامنفی باشد، بنابراین:

الف)

$$f(x)=\sqrt{۲x+۴}+۳$$

$$۲x+۴\geq ۰ \Rightarrow ۲x\geq -۴ \Rightarrow x\geq -۲ \Rightarrow D_f=[-۲,+\infty)$$

ب)

$$g(x)=\sqrt{۱۲-۶x}$$

$$۱۲-۶x\geq ۰ \Rightarrow ۱۲\geq ۶x \Rightarrow x\leq ۲ \Rightarrow D_g=(-\infty,۲]$$

پ)

$$p(x)=\sqrt{۱۶-x^۲}$$

$$۱۶-x^۲\geq ۰ \Rightarrow (۴-x)(۴+x)\geq ۰$$

$$\Rightarrow -۴\leq x\leq ۴ \Rightarrow D_p=[-۴,۴]$$

---

۱۳۳. عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج باید نامنفی باشد، پس:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۵x+۶}$$

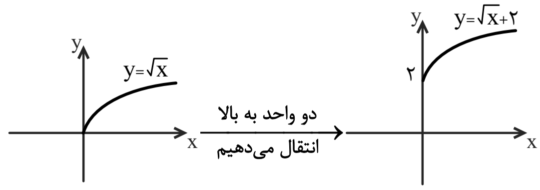
$$x^۲-۵x+۶\geq ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۳)\geq ۰$$

با کمک جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم، نامعادله را حل می‌کنیم:

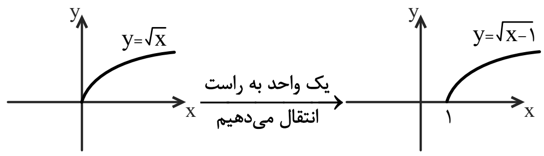
x		۲		۳	
$x^۲-۵x+۶$	+	۰	−	۰	+

$$D_f: x\leq ۲ \cup x\geq ۳$$

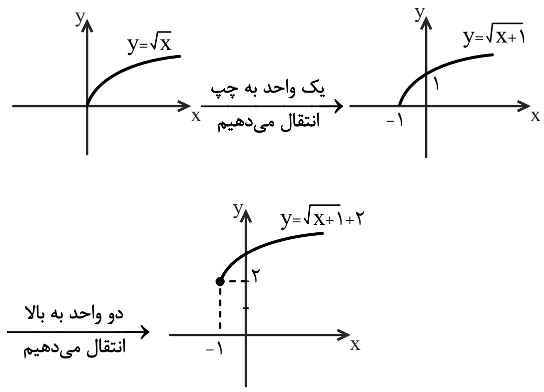
۱۳۴. الف) نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x}+۲$ به‌دست آید.



ب) نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱}$ به‌دست آید.



پ) نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ابتدا یک واحد به چپ و سپس دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x+۱}$ به‌دست آید.



۱۳۵. دو تابع به‌صورت زوج مرتب، در صورتی مساوی‌اند که به‌عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند. از طرفی، تابع g، دو زوج مرتب با مؤلفه‌ی اول برابر دارد، بنابراین باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد تا g تابع باشد، لذا:

$$\begin{cases}(b,۵)\in g\\(b,c)\in g\end{cases}\xrightarrow{\text{تابع است } g} c=۵$$

$$\begin{cases}(۵,۳)\in f\\(۵,a)\in g\end{cases}\xrightarrow{f=g} a=۳$$

$$\begin{cases}(-۳,۵)\in f\\(b,۵)\in g\end{cases}\xrightarrow{f=g} b=-۳$$

۱۳۶. نمودار داده شده مربوط به یک تابع خطی است که $x=۰$ جزء دامنه‌ی آن نیست، بنابراین این نمودار مربوط به تابع f است.

تابع g را نیز بررسی می‌کنیم. ابتدا دامنه‌ی آن را به‌دست آورده و سپس ضابطه‌ی آن را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{x^۲-x}{x-۱}$$

$$x-۱\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

$$g(x)=\frac{x(x-۱)}{x-۱}=x$$

دامنه‌ی تابع g با دامنه‌ی نمودار داده شده برابر نیست. همچنین نمودار داده شده دارای طول از مبدأ منفی است، پس ضابطه‌ی تابع g نیز نمی‌تواند ضابطه‌ی نمودار داده شده باشد.

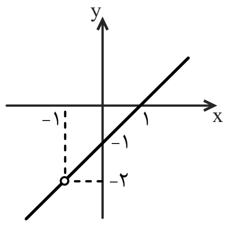
۱۳۷. ابتدا دامنه‌ی توابع را یافته، سپس ضابطه‌ی آنها را ساده کرده و آنها را رسم می‌کنیم:

الف)

$$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x+۱}$$

$$x+۱\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

$$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x+۱}=\frac{(x+۱)(x-۱)}{x+۱}=x-۱ \quad , \quad x\neq -۱$$

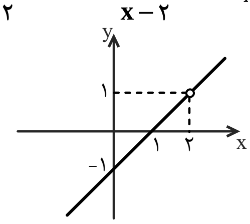


ب)

$$g(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۲}$$

$$x-۲\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۲ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$f(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۲}=\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۲}=x-۱ \quad , \quad x\neq ۲$$



دامنه‌ی دو تابع f و g برابر نیست، پس دو تابع مساوی نیستند (همچنین واضح است که نمودار دو تابع بر هم منطبق نیست، پس مساوی نیستند.)

۱۳۸. دو تابع f و g در صورتی مساوی‌اند که اولاً دامنه‌ی آنها برابر باشد، ثانیاً به ازای هر x از دامنه داشته باشیم $f(x)=g(x)$. پس ابتدا دامنه‌ی هریک از توابع را به‌دست آورده و سپس ضابطه‌ها را ساده می‌کنیم.

الف)

$$f(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$$

$$x-۳\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۳ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$$

$$f(x)=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=x+۳ \quad , \quad D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$$

$$g(x)=x+۳ \quad , \quad D_g=\mathbb{R}$$

دامنه‌ی تابع f و g برابر نیست، پس دو تابع مساوی نیستند.

ب)

$$f(x)=\frac{x+۱}{|x+۱|}$$

$$|x+۱|\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۱}{x+۱} & , \quad x>-۱\\[2mm] \dfrac{x+۱}{-(x+۱)} & , \quad x<-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۱ & , \quad x>-۱\\ -۱ & , \quad x<-۱\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{|x+۱|}{x+۱}$$

$$x+۱\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۱}{x+۱} & , \quad x>-۱\\[2mm] \dfrac{-(x+۱)}{x+۱} & , \quad x<-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}۱ & , \quad x>-۱\\ -۱ & , \quad x<-۱\end{cases}$$

دامنه و ضابطه‌ی هر دو تابع به ازای هر x از دامنه برابر است، پس مساوی‌اند.

---

۱۳۹. دو تابع در صورتی با هم مساوی‌اند که اولاً دامنه‌ی آنها برابر باشد، ثانیاً به ازای هر x از دامنه مقدار دو تابع برابر باشد. دامنه‌ی هر دو تابع f و g مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، پس ضابطه‌ی آنها را مقایسه می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-۵)(x+۵)}{x-۵} & , \quad x\neq ۵\\[2mm] ۶ & , \quad x=۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۵ & , \quad x\neq ۵\\ ۶ & , \quad x=۵\end{cases}$$

ضابطه‌ی هر دو تابع به ازای $x\neq ۵$ برابر است. مقدار هر دو تابع به ازای $x=۵$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(۵)=۶\\ g(۵)=۵+۵=۱۰\end{cases} \Rightarrow f(۵)\neq g(۵)$$

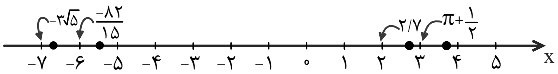
$\Rightarrow$ تابع f و g برابر نیستند

۱۴۰. جزء صحیح هر عدد غیرصحیح برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن عدد روی محور اعداد، بنابراین ابتدا محل تقریبی هریک از اعداد را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:

$$\pi+\frac{۱}{۲}\simeq ۳/۱۴+۰/۵=۳/۶۴$$

$$-\frac{۸۲}{۱۵}\simeq -۵/۴۷$$

$$-۳\sqrt{۵}=-\sqrt{۴۵}\simeq -۶/۷$$



بنابراین با توجه به محور اعداد و تعریف جزء صحیح داریم:

الف) $[۲/۷]=۲$ ب) $[\pi+\frac{۱}{۲}]=۳$

پ) $[-\frac{۸۲}{۱۵}]=-۶$ ت) $[-۳\sqrt{۵}]=-۷$

---

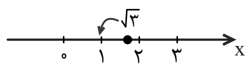
۱۴۱. نکته: اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد آنگاه $[u+k]=[u]+k$. با توجه به این نکته، مقدارهای خواسته شده را می‌یابیم.

الف)

$$f(x)=[x+۱]$$

$$f(\sqrt{۳}-۱)=[\sqrt{۳}-۱+۱]=[\sqrt{۳}]$$

حال محل تقریبی $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$ را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:



بنابراین:

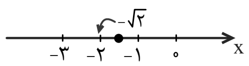
$$f(\sqrt{۳}-۱)=[\sqrt{۳}]=۱$$

ب)

$$f(x)=[x+۳]$$

$$f(۲-\sqrt{۲})=[۲-\sqrt{۲}+۳]=[۵-\sqrt{۲}]=[-\sqrt{۲}]+۵$$

حال محل تقریبی $-\sqrt{۲}\simeq -۱/۴$ را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:



بنابراین:

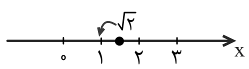
$$f(۲-\sqrt{۲})=[-\sqrt{۲}]+۵=-۲+۵=۳$$

پ)

$$f(x)=[x+۱]$$

$$f(\sqrt{۲})=[\sqrt{۲}+۱]=[\sqrt{۲}]+۱$$

حال محل تقریبی $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:



بنابراین:

$$f(\sqrt{۲})=[\sqrt{۲}]+۱=۱+۱=۲$$

۱۴۲. جزء صحیح هر عدد صحیح برابر خود عدد است و جزء صحیح هر عدد غیرصحیح برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن عدد روی محور اعداد، بنابراین:

$[\sqrt{۱}]=[۱]=۱$

اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ بین دو عدد صحیح ۱ و ۲ قرار دارند، پس اولین عدد صحیح سمت چپ آنها روی محور اعداد ۱ است:

$[\sqrt{۲}]=۱\ ,\ [\sqrt{۳}]=۱\ ,\ [\sqrt{۴}]=[۲]=۲$

اعداد $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۸}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارند، بنابراین اولین عدد صحیح سمت چپ آنها روی محور اعداد ۲ است:

$[\sqrt{۵}]=۲\ ,\ [\sqrt{۶}]=۲\ ,\ [\sqrt{۷}]=۲\ ,\ [\sqrt{۸}]=۲$

$[\sqrt{۹}]=[۳]=۳$

اعداد $\sqrt{۱۰}$، $\sqrt{۱۱}$، $\sqrt{۱۲}$ و $\sqrt{۱۳}$ بین دو عدد صحیح ۳ و ۴ قرار دارند، بنابراین اولین عدد صحیح سمت چپ آنها روی محور اعداد ۳ است:

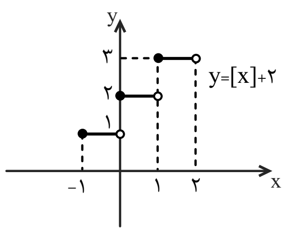
$[\sqrt{۱۰}]=۳\ ,\ [\sqrt{۱۱}]=۳\ ,\ [\sqrt{۱۲}]=۳\ ,\ [\sqrt{۱۳}]=۳$

بنابراین حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$[\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}]+\cdots+[\sqrt{۱۳}]$$
$$=۱+۱+۱+۲+۲+۲+۲+۲+۳+۳+۳+۳+۳$$
$$=۳+۱۰+۱۵=۲۸$$

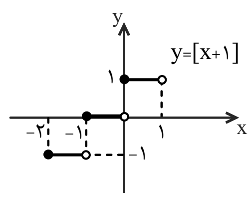
۱۴۳. x را به‌صورت بازه‌های زیر در نظر گرفته و مقدار جزء صحیح و تابع را می‌یابیم:

$$\begin{cases}-۱\le x<۰ \Rightarrow y=[x]+۲=-۱+۲=۱\\ ۰\le x<۱ \Rightarrow y=[x]+۲=۰+۲=۲\\ ۱\le x<۲ \Rightarrow y=[x]+۲=۱+۲=۳\end{cases}$$



۱۴۴. از آنجا که اگر $k\in\mathbb{Z}$ آنگاه $[u+k]=[u]+k$، ضابطه‌ی تابع $y=[x+۱]$ را می‌توان به‌صورت $y=[x]+۱$ نوشت. x را به‌صورت بازه‌های زیر در نظر گرفته و مقدار تابع را می‌یابیم:

$$\begin{cases}-۲\le x<-۱ \Rightarrow y=[x]+۱=-۲+۱=-۱\\ -۱\le x<۰ \Rightarrow y=[x]+۱=-۱+۱=۰\\ ۰\le x<۱ \Rightarrow y=[x]+۱=۰+۱=۱\end{cases}$$



۱۴۵. الف)

$[x]=۳ \Rightarrow ۳\le x<۴$

ب)

$[x+۲]=-۱$

با توجه به اینکه اگر $k\in\mathbb{Z}$ آنگاه $[u+k]=[u]+k$، خواهیم داشت:

$[x]+۲=-۱ \Rightarrow [x]=-۳ \Rightarrow -۳\le x<-۲$

۱۴۶. اگر x مسافت طی شده برحسب کیلومتر توسط تاکسی و $f(x)$ کرایه‌ی آن برحسب تومان باشد، با توجه به توضیحات مسأله، داریم:

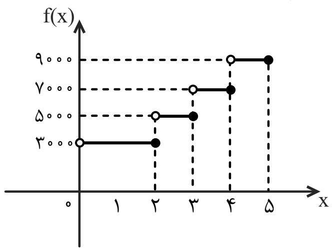
الف) اگر $۰<x\le ۲$، آنگاه $f(x)=۳۰۰۰$

ب) اگر $۲<x\le ۳$، آنگاه $f(x)=۳۰۰۰+۱\times ۲۰۰۰=۵۰۰۰$

پ) اگر $۳<x\le ۴$، آنگاه $f(x)=۳۰۰۰+۲\times ۲۰۰۰=۷۰۰۰$

ت) اگر $۴<x\le ۵$، آنگاه $f(x)=۳۰۰۰+۳\times ۲۰۰۰=۹۰۰۰$

پس نمودار این تابع به‌صورت زیر است:



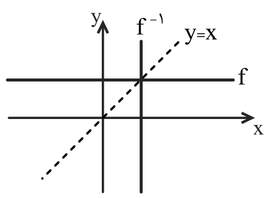
۱۴۷. الف) نادرست است. نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.

ب) نادرست است. وارون تابع f به‌صورت $f^{-1}=\{(۲,۱),(۱,۰),(۲,۲)\}$ است که در آن دو زوج مرتب متمایز $(۲,۱)$ و $(۲,۲)$ مؤلفه‌ی اول برابر دارند، پس تابع نیست.

پ) درست است.

ت) نادرست است. به نمودار زیر توجه کنید.

وارون تابع خطی ثابت، یک خط عمودی است که تابع نیست.



۱۴۸. f^{-1} از عوض کردن جای مؤلفه‌های اول و دوم در زوج‌های مرتب f، به‌دست می‌آید.

$f=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۴,-۱)\}$

$\Rightarrow f^{-1}=\{(۲,-۱),(۳,۰),(-۱,۴)\}$

دامنه‌ی f^{-1}، مجموعه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی آن است که برابر با برد تابع f است.

$D_{f^{-1}}=\{۲,۳,-۱\}=R_f$

برد f^{-1}، مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی آن است که برابر با دامنه‌ی تابع f است.

$R_{f^{-1}}=\{-۱,۰,۴\}=D_f$

۱۴۹. ابتدا $f^{-۱}$ را می‌نویسیم:

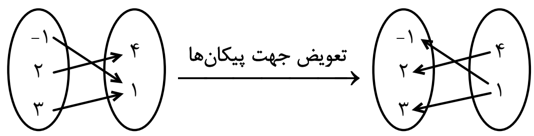
$$f=\{(m^{۴}+۲,۵),(n^{۳}+۱,۴)\}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}=\{(۵,m^{۴}+۲),(۴,n^{۳}+۱)\}$$
$$\Rightarrow R_{f^{-۱}}=\{m^{۴}+۲,n^{۳}+۱\}$$

اگر $\{m^{۴}+۲,n^{۳}+۱\}=\{-۷,۱۸\}$، از آنجا که $m^{۴}+۲$ همواره مثبت است باید برابر با ۱۸ و $n^{۳}+۱$ برابر با (-۷) باشد، پس:

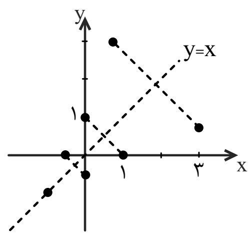
$$\begin{cases} m^{۴}+۲=۱۸\Rightarrow m^{۴}=۱۶\Rightarrow m=\pm۲ \\ n^{۳}+۱=-۷\Rightarrow n^{۳}=-۸\Rightarrow n^{۳}=(-۲)^{۳}\Rightarrow n=-۲ \end{cases}$$

---

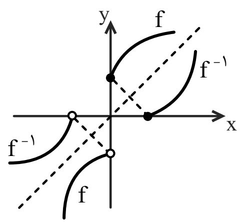
۱۵۰. الف) در نمایش پیکانی تابع، با عوض کردن جهت پیکان‌ها، وارون تابع به‌دست می‌آید:



ب) با قرینه کردن نقاط نسبت به خط $y=x$ وارون تابع به‌دست می‌آید:



پ) قرینه‌ی نمودار را نسبت به خط $y=x$ به‌دست می‌آوریم تا نمودار $f^{-۱}$ حاصل شود.



---

۱۵۱. الف) در تابع f، دو زوج مرتب متمایز $(-۲,۳)$ و $(۴,۳)$ مؤلفه‌ی دوم برابر دارند، پس تابع f یک‌به‌یک نیست.

ب) در تابع g، خطی موازی محور xها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع g یک‌به‌یک نیست.

پ) در تابع h به عضو صفر در مجموعه‌ی دوم (برد) دو پیکان وارد شده است، پس تابع h یک‌به‌یک نیست. همچنین هرگاه تعداد اعضای برد از تعداد اعضای دامنه کمتر باشد، تابع یک‌به‌یک نخواهد بود. در این تابع، دامنه دارای ۴ عضو و برد دارای ۳ عضو است، پس یک‌به‌یک نیست.

ت) در تابع k، به هر عضو مجموعه‌ی دوم حداکثر یک پیکان وارد شده است، پس تابع یک‌به‌یک است.

---

۱۵۲. اگر f یک‌به‌یک باشد، هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن نباید مؤلفه‌های دوم برابر داشته باشند، پس:

$$\begin{cases} (a,۲)\in f \\ (۰,۲)\in f \end{cases}\Rightarrow a=۰\Rightarrow f=\{(۰,۲),(-۱,۱),(-۱,b)\}$$

و از آنجا که f تابع است، هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، نباید مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند، پس:

$$\begin{cases} (-۱,۱)\in f \\ (-۱,b)\in f \end{cases}\Rightarrow b=۱$$

---

۱۵۳. اگر رابطه‌ی R یک‌به‌یک باشد، هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن نباید مؤلفه‌های دوم برابر داشته باشند، پس:

$$\begin{cases} (۳,۲)\in R \\ (b,۲)\in R \end{cases}\Rightarrow b=۳$$

$$\Rightarrow R=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^{۲}-a),(-۱,۴)\}$$

و از آنجا که رابطه‌ی R تابع است، هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن نباید مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند، پس:

$$\begin{cases} (۳,۲)\in R \\ (۳,a^{۲}-a)\in R \end{cases}\Rightarrow a^{۲}-a=۲\Rightarrow a^{۲}-a-۲=۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ a=-۱ \end{cases}$$

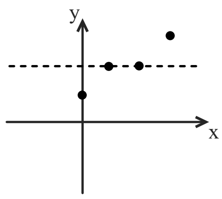
به ازای هر دو مقدار به‌دست آمده برای a، رابطه‌ی R را بازنویسی می‌کنیم:

$$a=۲\Rightarrow R=\{(۳,۲),(۲,۵),(-۱,۴)\}\quad ✓$$
$$a=-۱\Rightarrow R=\{(۳,۲),(-۱,۵),(-۱,۴)\}\quad ✗$$

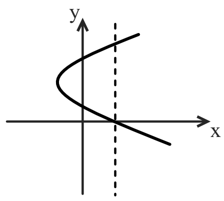
$a=-۱$ قابل قبول نیست، زیرا در این حالت دو زوج مرتب متمایز $(-۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند و R تابع نیست.

---

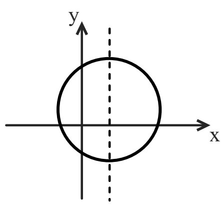
۱۵۴. الف) خطی موازی محور xها وجود دارد که نموار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس یک‌به‌یک نیست.



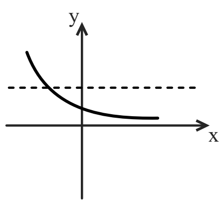
ب) خطی موازی محور yها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.



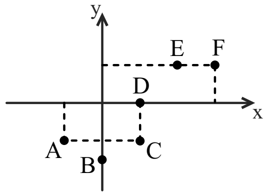
پ) خطی موازی محور yها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.



ت) هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس یک‌به‌یک است.



۱۵۵. الف) نمودار داده شده یک‌به‌یک نیست، زیرا خطی موازی محور xها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند (E و F یا A و C).



همچنین این نمودار، تابع نیست، زیرا خطی موازی محور yها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند (C و D).

ب) چون خطی موازی محور yها، نمودار را در دو نقطهٔ D و C قطع می‌کند، پس باید یکی از این نقاط حذف شوند تا نمودار یک تابع شود. از طرفی، خطی موازی محور xها نمودار را در دو نقطهٔ A و C قطع می‌کند، پس برای اینکه حداقل نقاط را حذف کنیم، باید نقطهٔ C را حذف کنیم.

همچنین خطی موازی محور xها، نمودار را در دو نقطهٔ E و F قطع می‌کند، پس یکی از این نقاط نیز باید حذف شود تا نمودار یک تابع یک‌به‌یک شود.

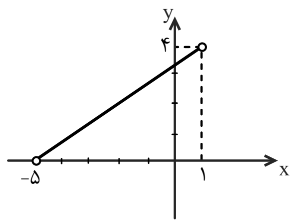
بنابراین حداقل دو نقطهٔ C و E یا C و F باید حذف شوند.

۱۵۶.

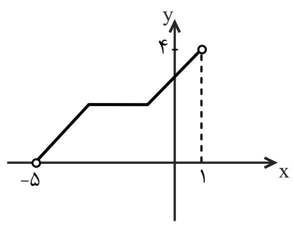
$$f=\{(۱,۱),(۲,۰),(۳,۰)\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود به دلیل وجود دو زوج مرتب متمایز $(۲,۰)$ و $(۳,۰)$ در f، این تابع یک‌به‌یک نیست و از آنجا که $(۱,۱)\in f$، پس $f(۱)=۱$ و $(۳,۰)\in f$، پس $f(۳)=۰$، در نتیجه $f(۳)<f(۱)$.

۱۵۷. الف) تابع خطی غیرثابت، تابعی یک‌به‌یک است، پس می‌توان در دامنه و برد داده شده، یک تابع خطی رسم کرد.



ب) تابع زیر با دامنهٔ $(-۵,۱)$ و برد $(۰,۴)$ یک‌به‌یک نیست، زیرا خطی موازی محور xها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



۱۵۸. هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است، ولی تابع خطی ثابت $(y=k)$ یک‌به‌یک نیست. بنابراین شیب خط داده شده باید برابر با صفر باشد تا یک‌به‌یک نباشد:

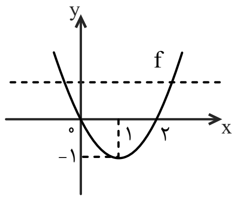
$$y=۳ax+۱۷-۱۸x \Rightarrow y=(۳a-۱۸)x+۱۷$$

$$\Rightarrow \text{شیب}=۳a-۱۸ \Rightarrow ۳a-۱۸=۰ \Rightarrow a=۶$$

۱۵۹. نمودار تابع را رسم می‌کنیم. ابتدا معادلهٔ تابع را به‌صورت مربع کامل درآورده، سپس با استفاده از انتقال، آن را رسم می‌کنیم:

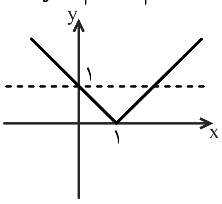
$$f(x)=x^۲-۲x+۱-۱=(x-۱)^۲-۱$$

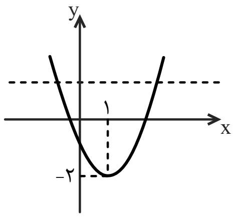
تابع f یک‌به‌یک نیست، زیرا خطی موازی محور xها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.



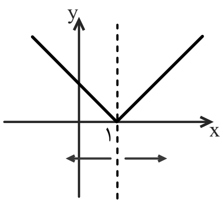
۱۶۰. نمودار هریک از تابع‌ها را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:

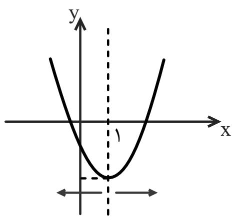
الف) $y=|x-۱|$ ب) $y=x^۲-۲x-۱=(x-۱)^۲-۲$





این دو تابع یک‌به‌یک نیستند زیرا خطی موازی محور xها وجود دارد که نمودار آنها را در بیش از یک نقطه قطع کند. اگر دامنه‌های هر دو تابع را به بازه‌های $(-\infty,۱]$ یا $[۱,+\infty)$ محدود کنیم، یک‌به‌یک خواهند شد. در هر بازه‌ای که زیرمجموعهٔ این بازه‌ها باشند نیز تابع‌ها یک‌به‌یک‌اند.





۱۶۱. برای یافتن ضابطهٔ وارون تابع، ابتدا x را برحسب y یافته، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

الف) $f(x)=۳x-۴$

$$y=۳x-۴ \Rightarrow y+۴=۳x \Rightarrow x=\frac{y+۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=\frac{x+۴}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

ب) $g(x)=\dfrac{۱-۲x}{۳}$

$$y=\frac{۱-۲x}{۳} \Rightarrow ۳y=۱-۲x \Rightarrow x=\frac{۱-۳y}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=\frac{۱-۳x}{۲} \Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۱-۳x}{۲}$$

پ)

$$۲y-۳x+۶=۰$$

$$\Rightarrow ۲y+۶=۳x \Rightarrow x=\frac{۲y+۶}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=\frac{۲x+۶}{۳}$$