فهرست

فصل اول: منطق و استدلال ریاضی ۷

پاسخ‌نامهٔ فصل اول ۲۷

فصل دوم: تابع ۴۰

پاسخ‌نامهٔ فصل دوم ۶۴

فصل سوم: تحلیل داده‌ها ۷۹

پاسخ‌نامهٔ فصل سوم ۸۹

خلاصهٔ فصل‌ها ۹۵

امتحان‌های نیم‌سال اول ۱۰۲

پاسخ‌نامهٔ امتحان‌های نیم‌سال اول ۱۰۶

امتحان‌های نیم‌سال دوم ۱۱۱

پاسخ‌نامهٔ امتحان‌های نیم‌سال دوم ۱۱۹

۱ منطق ریاضی و گزاره‌ها

تعریف منطق

منطق در لغت به معنی کلمه و گفتار است **(از نُطق می‌آید.)** ولی از نظر فلاسفه و منطق‌دانان، به معنی قانونِ درست فکرکردن است. به عبارت دیگر می‌توان گفت:

۱ منطق، استدلال‌ها را بررسی می‌کند و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص می‌کند؛ زیرا اگر برای اثبات یک موضوع، استدلال‌های ما نادرست باشند نتیجهٔ به دست آمده هم، قابل قبول نخواهد بود.

۲ منطق، ابزاری است از نوع قاعده و قانون که به کار بُردن آن، ذهن را از خطای در تفکر مصون نگه می‌دارد.

نکته اولین نفری که قواعد ذهن انسان را به دست آورد و با ترتیبی خاص، دسته‌بندی کرد، ارسطو بود.

تعریف منطقِ ریاضی

به نظر شما کاربرد دستور زبان فارسی چیست؟ حتماً پاسخ می‌دهید که دستور زبان فارسی، علمی است که روش درست گفتن و درست نوشتن را به ما می‌آموزد. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، **منطقِ ریاضی**، دستور این زبان است. به عبارت دیگر، **منطق ریاضی** روش درست استدلال‌کردن در علم ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

ترکیب گزاره‌ها

در منطقِ ریاضی، گزاره، جمله‌ای است خبری که می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد هر چند که ممکن است از درستی یا نادرستی آن، اطلاعی نداشته باشیم. مثلاً:

«۲ عددی اول است.» ← یک گزاره با ارزش درست است.

«$۵^۲ > ۳^۳$» ← یک گزاره با ارزش نادرست است چون ۲۵ کوچک‌تر از ۲۷ است.

«بیشتر درس بخوان.» ← گزاره نیست. (جملهٔ امری است.)

«چه ماشین زیبایی!» ← گزاره نیست. (جملهٔ عاطفی است.)

«شما امسال کنکور می‌دهید؟» ← گزاره نیست. (جملهٔ پرسشی است.)

سؤال (شاگرد)، ببخشید مگه $۵^۲ > ۳^۳$ جملهٔ خبری محسوب می‌شه؟ من که کلمهٔ فارسی توش نمی‌بینم!

دبیر، خُب شما ($۵^۲ > ۳^۳$) رو چه‌جوری می‌خونی؟ مگه نمی‌گی «$۵^۲$ بزرگ‌تر از $۳^۳$ است.» پس دیدی که ($۵^۲ > ۳^۳$) یه جملهٔ خبریه و حتماً لازم نیست جمله، فارسی باشه. خیلی وقتا از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنیم.

تذکرمهم در بعضی از جملات خبری، نمی‌توانیم دربارهٔ درستی یا نادرستی آن‌ها اظهار نظر کنیم؛ لذا آن‌ها را گزاره محسوب نمی‌کنیم؛ مثلاً جملهٔ خبری «متوازی‌الاضلاع، زیباترین شکل هندسی است.» گزاره محسوب نمی‌شود؛ چون زیبایی، موضوعی سلیقه‌ای است و اصولاً از نظر منطقِ ریاضی، جملهٔ مذکور، قابل ارزش‌گذاری نیست.

مثال و پاسخ

مثال کدام‌یک از جملات و عبارات زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف کباب، خوشمزه‌تر از پیتزا است.

ب عدد $\sqrt{3}$ گویا است.

پ افلاطون، شاگرد سقراط بود.

ت اصالت شما برای کدام شهر است؟

ث عدد $(-2)^n$ عددی منفی است. $(n \in N)$

ج $-3 \geq -10$

چ $0/1 = 0/2 \times \frac{1}{2}$

ح کوچک‌ترین عدد طبیعی دورقمیِ مربع کامل، عدد ۱۶ است.

پاسخ **الف** گزاره نیست. (برای مقایسهٔ مزهٔ غذاها نمی‌توانیم ارزش‌گذاری کنیم.)

ب گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون $\sqrt{3}$ گنگ است.

پ گزاره است و ارزش آن، درست است.

ت گزاره نیست. (جملهٔ پرسشی است.)

ث گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون اگر n زوج باشد، حاصل $(-2)^n$ مثبت می‌شود و اگر n فرد باشد، حاصل $(-2)^n$ منفی می‌شود.

ج گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون -10 کوچک‌تر از -3 است.

چ گزاره است و ارزش آن، درست است زیرا: $\frac{1}{10} = \frac{\cancel{2}}{10} \times \frac{1}{\cancel{2}} = 0/1$

ح گزاره است و ارزش آن، درست است؛ چون اولاً ۱۶ مربع کامل است؛ یعنی جذر کامل دارد $(\sqrt{16} = 4)$ و ثانیاً ۱۶ کوچک‌ترین عدد طبیعی دورقمی است که این خاصیت را دارد.

جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها)

در منطقِ ریاضی، هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی کوچک مانند p, q, r, s و ... نمایش می‌دهیم. ضمناً بعضی گزاره‌ها خود، ترکیبی از دو یا چند گزارهٔ دیگر هستند که به آن‌ها گزاره‌های ترکیبی (مرکب) می‌گوییم. کمی جلوتر با انواع گزاره‌های ترکیبی آشنا می‌شوید. جبر گزاره‌ها کارش این است که به وسیلهٔ یک سری قراردادها و نمادگذاری‌ها ارزش یک گزاره را تعیین می‌کند.

در جدول های زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده‌اند. ارزش درست یک گزاره را با «د» یا «T» و ارزش نادرست آن را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. (True یعنی درست و False یعنی نادرست.)

نام گزاره ← p
T → ۲ حالت
F

تعداد حالت‌های ارزشی یک گزاره $= 2^1 = 2$

p	q
T	T
T	F → ۴ حالت
F	T
F	F

تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره $= 2^2 = 4$

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره $= 2^3 = 8$

نتیجه اگر تعداد گزاره‌ها n باشد، در جدول ارزشی آن‌ها، تعداد حالت‌ها برابر با 2^n خواهد بود؛ مثلاً اگر تعداد گزاره‌ها ۴ باشد، در جدول ارزشی مربوط به آن‌ها ۱۶ $= 2^4$ حالتِ مختلف وجود دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش آن گزاره باشد. نقیض یک گزاره مثل p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم. $\sim p$ را این‌طور می‌خوانیم: «چنین نیست که p»، یا «نقیضِ p». جدول ارزش نقیض یک گزاره نسبت به خود آن گزاره به شکل روبه‌رو است:

p	$\sim p$
T	F
F	T

اگر گزارهٔ سادهٔ p به شکل یک جملهٔ فارسی باشد، برای ساختن نقیض آن، بهترین روش این است که فعل جمله را نقیض کنیم؛ البته این کار، تنها راه ساختن نقیض نیست؛ مثلاً نقیض گزارهٔ «۶ عددی زوج است.» را به ۳ صورت می‌توان بیان کرد:

عدد ۶، عددی زوج است.
- نقیض: چنین نیست که عدد ۶ عددی زوج باشد.
- نقیض: عدد ۶ عددی زوج نیست. (بهترین جمله)
- نقیض: عدد ۶ عددی فرد است.

تذکرمهم گاهی اوقات، گزارهٔ سادهٔ موردنظر، شامل یک نماد ریاضی است که نقیض این نماد طبق جدول زیر، تعیین می‌شود:

نماد ریاضی	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$	$=$	$\neq$	$\in$	$\notin$	$\subset$	$\not\subseteq$
نقیض نماد	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$	$\neq$	$=$	$\notin$	$\in$	$\not\subseteq$	$\subseteq$

مثلاً نقیضِ گزارهٔ $\frac{1}{3}=2x+5$ برابر است با: $\frac{1}{3}\neq 2x+5$ و یا نقیضِ گزارهٔ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ عبارت است از: $\mathbb{N}\not\subseteq\mathbb{R}$؛ هم‌چنین نقیضِ گزارهٔ $8\geq 3$ برابر است با $8<3$.

مثال و پاسخ

مثال **نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید؛ سپس ارزش درستی هر گزاره و نقیضش را تعیین کنید:**

الف ۵۱ عددی اول است.

ب $2^5=2^4+2^3$

پ کسر $\frac{5x}{x^2-3}$ گویا است.

ت $(5\times 6)>(4\times 9)$

ث $4\in\mathbb{N}$

ج a عددی مثبت است.

پاسخ

الف ۵۱ عددی اول است. (نادرست (F)) ← نقیض ← ۵۱ عددی اول نیست. (چنین نیست که ۵۱ عددی اول باشد.) (درست (T))

ب می‌دانیم که: $2^3=8$ ، $2^4=16$ و $2^5=32$؛ لذا $2^4+2^3=16+8=24$؛ بنابراین گزارهٔ داده‌شده نادرست است و نقیض آن برابر است با: $2^5\neq 2^4+2^3$ و ارزش گزارهٔ نقیض، درست است.

پ کسر $\frac{5x}{x^2-3}$ گویا است. (درست (T)) ← نقیض ← کسر $\frac{5x}{x^2-3}$ گویا نیست. (نادرست (F))

ت $30>36$ (درست (T)) ← نقیض ← $30\leq 36$ (نادرست (F))

ث $4\in\mathbb{N}$ (درست (T)) ← نقیض ← $4\notin\mathbb{N}$ (نادرست (F))

ج a عددی مثبت است. (نامعلوم) ← نقیض ← a عددی مثبت نیست. (چنین نیست که a عددی مثبت باشد.) (نامعلوم)

ارزش گزارهٔ « a عددی مثبت است.» معلوم نیست؛ چون مقدار a به ما داده نشده است؛ یعنی با توجه به مقدار a، گزارهٔ موردنظر، می‌تواند درست یا نادرست باشد.

a عددی مثبت نیست.	a عددی مثبت است.
F	T
T	F

سؤال (شاگرد): استاد نمی‌شه بگیم نقیض گزارهٔ «a عددی مثبت است.» می‌شه: «a عددی منفی است.»؟

دبیر: به نظرت آیا هر عددی که مثبت نباشه، منفیه؟ خیر، صفر مثبت نیست ولی منفی هم نیست. به عبارت دیگه، وقتی a مثبت نباشه، یا منفیه یا صفر ولی «a عددی منفی است.» صفر رو شامل نمی‌شه. پس نقیض گزارهٔ «a عددی مثبت است» عبارت‌است از: «a عددی مثبت نیست» یا «a عددی منفی یا صفر است.»

گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزارهٔ p و q یکسان باشد به آن‌ها گزاره‌های هم‌ارز می‌گوییم و این موضوع را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی p هر ارزشی داشته باشد (درست یا نادرست) q هم همان ارزش را دارد؛ مثلاً گزاره‌های «۲۵ عددی مربع کامل است.» و « $-۳ \in \mathbb{Z}$ » هم‌ارز هستند؛ زیرا هر دوی آن‌ها ارزش درست (T) دارند.

هم‌چنین گزاره‌های « $\sqrt{۳} > ۳$ » و « $(-۵)^۲ = -۲۵$ » هم‌ارز می‌باشند؛ چون هر دوی آن‌ها دارای ارزش نادرست (F) هستند. واضح است که اگر $p \equiv q$ باشد، نقیض‌های آن‌ها نیز هم‌ارزند؛ یعنی: $\sim p \equiv \sim q$.

مثال و پاسخ

مثال نقیض گزاره‌های زیر را به شکل هم‌ارزی بنویسید.

الف) $(\sqrt{۳})^۲ \notin \mathbb{Q}$ ب) $۲^{۱۰} > ۲^{۱۴}$ پ) $x = y$

پاسخ

الف) $\sim [(\sqrt{۳})^۲ \notin \mathbb{Q}] \equiv (\sqrt{۳})^۲ \in \mathbb{Q}$ ب) $\sim (۲^{۱۰} > ۲^{۱۴}) \equiv (۲^{۱۰} \leq ۲^{۱۴})$ پ) $\sim (x = y) \equiv (x \neq y)$

تذکر نقیضِ نقیض یک گزاره، هم‌ارز با همان گزاره است؛ یعنی: $\sim (\sim p) \equiv p$

(این موضوع شما رو یاد چی میندازه؟ بله! منفی در منفی، می‌شود مثبت.)

مثال ۴ عددی مربع کامل است. ← (نقیض) ۴ عددی مربع کامل نیست. ← (نقیض) ۴ عددی مربع کامل است.

گزارهٔ p — گزارهٔ $\sim p$ — گزارهٔ $\sim(\sim p)$

سؤال‌های امتحانی

۱- کدام‌یک از جملات یا عبارت‌های زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید:

الف) امروز به سینما نرو.

ب) $۱۰^۴$ عدد بسیار بزرگی است.

پ) میانهٔ داده‌های ۱، ۳، ۴، ۸، ۱۷، ۲۰، ۳۱، ۵۴ عدد ۱۲/۵ است.

ت) از نمودار حُبابی برای نمایش هم‌زمان ۲ متغیر استفاده می‌شود.

ث) عدد طبیعی a، زوج است.

ج) عدد $(-۳)^{n+۱}$ عددی منفی است. $(n \in \mathbb{N})$

چ) بزرگ‌ترین عددِ اولِ دورقمی، برابر ۸۹ نیست.

ح) عبارت $\frac{|x|}{۳x^۲ + ۵x}$ یک عبارت گویا نیست.

خ) رابطهٔ $f = \{(۴,۵),(۲,۱),(۱۰,۲۰)\}$ یک تابع است.

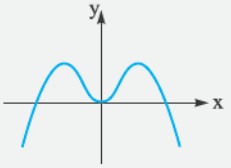
د) بُرد تابع $y = ۳$ برابر است با کل اعداد حقیقی. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

ذ) نمودار سهمی $y = ۳ - x^۲$ از نواحی دوم و سوم نمی‌گذرد. *(مخصوص علاقه‌مندان)*

ر) تعداد هلی‌کوپترهای ارتش‌های کشورهای مختلف، متغیری کمّی با مقیاس نسبتی است.

ز) واریانس، جذر انحراف‌معیار است.

۲- جدول زیر را کامل کنید:

ارزش ~p	گزارهٔ ~p	ارزش p	گزارهٔ p
			$۱۰^۳ + ۱۰^۴ = ۱۰^۷$
			مربع هر عدد حقیقیِ منفی، عددی مثبت است.
	$-۸ \geq -۱۰$		
	 نمودار تابع است.		
			مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر با $۲^۴$ است.
			طول رأس سهمی $y = x^۲ - ۸x + ۵$ برابر با $x = ۳$ است. (مخصوص علاقه‌مندان)
	در تجزیهٔ عبارت $۴x^۲ - ۸x - ۲۱$ عامل $(۲x + ۳)$ وجود ندارد. (مخصوص علاقه‌مندان)		
			در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰، ۲۸۰۰ و ۵ شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین، برای نمایش محل تمرکز داده‌ها است.
			مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج است.
			قرینهٔ هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد است.
			معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، از خود آن عدد کوچک‌تر است.
			مجموع دو عدد $\sqrt{۳} - ۱$ و $\sqrt{۳} + ۱$، عددی گنگ است.

۲ گزاره‌های عطفی و فصلی

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها، به شکل‌های مختلفی می‌توانیم گزاره‌های ساده را با هم ترکیب کنیم تا گزاره‌های مرکب ساخته شوند. در کتاب ریاضی‌تان، ترکیب گزاره‌ها را با ۴ رابط «و»، «یا»، «اگر ... آن‌گاه ...»، «اگر ... آن‌گاه ... و برعکس» انجام می‌دهیم. در این درس‌نامه می خواهیم ارزش گزاره‌های عطفی و فصلی را تعیین کنیم. ابتدا گزارهٔ عطفی را بررسی می کنیم.

ترکیب عطفی دو گزاره

گر دو گزارهٔ ساده را با حرف «و» به هم مربوط کنیم، گزارهٔ مرکبی ساخته می‌شود که آن را ترکیب عطفی آن دو گزاره می‌نامیم. ترکیب عطفی p و q را با نماد $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم و آن را «p و q» می‌خوانیم. به مثال‌های زیر دقت کنید:

گزارهٔ p: ۵ عددی فرد است.
گزارهٔ q: ۲/۳ عددی صحیح است.
$\Leftarrow$ گزارهٔ $p \wedge q$: ۵ عددی فرد است (p) و ۲/۳ عددی صحیح است (q).

گزارهٔ p: ۲ عددی زوج است.
گزارهٔ q: ۲ عددی اول است.
$\Leftarrow$ گزارهٔ $p \wedge q$: ۲ عددی زوج است (p) و ۲ عددی اول است (q). (به طور خلاصه می‌توان گفت ۲ عددی زوج و اول است.)

جدول ارزش درستی $p \wedge q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هم p و هم q درست باشند.

اگر حداقل یکی از دو گزارهٔ p و q نادرست باشند؛ $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

مثال و پاسخ

مثال ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است جدول ارزش‌گذاری رسم کنید.

الف تهران پایتخت ایران است و جاکارتا پایتخت مالزی است.

ب $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$ و $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$

پ ۱۱۰ عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است.

ت رابطهٔ f تابع است و رابطهٔ $g = \{(1,2),(3,4)\}$ تابع است.

پاسخ

الف تهران پایتخت ایران است (T) و جاکارتا پایتخت مالزی است (F). ⇐ کل گزاره، نادرست (F) است.

ب $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$ (T) و $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ (T) ⇐ کل گزاره، درست (T) است.

پ ۱۱۰ عددی مربع کامل است (F، ۱۱۰ جذر کامل ندارد.) و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است (F، ۲ کوچک‌ترین عدد طبیعی اول است.) ⇐ کل گزاره، نادرست (F) است.

ت رابطهٔ f تابع است (چون f به ماداده نشده) نامعلوم و رابطهٔ $\{(1,2),(3,4)\}$ تابع است. (عضوهای اول زوج‌ها مختلف‌اند.) T

باید برای گزارهٔ عطفی بالا جدول ارزش‌گذاری رسم کنیم، چون وضعیت ارزش f مشخص نیست:

f تابع است و g تابع است.	g تابع است.	f تابع است.
T	T	T
F	T	F

پس اگر f تابع باشد، کل گزارهٔ عطفی درست است و اگر f تابع نباشد، کل گزارهٔ عطفی، نادرست است.

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزارهٔ ساده را با حرف «یا» به هم مربوط کنیم، گزارهٔ مرکبِ حاصل، ترکیب فصلی آن دو گزاره نام دارد. ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q را به شکل $p \vee q$ نمایش داده و آن را به صورت «p یا q» می‌خوانیم؛ مثلاً:

گزارهٔ p: عدد ۱۲۰ بر ۵ بخش‌پذیر است.
گزارهٔ q: مربع عدد ۱۰، برابر ۲۰ است.
⟵ گزارهٔ $p \vee q$: عدد ۱۲۰ بر ۵ بخش‌پذیر است یا مربع عدد ۱۰، برابر ۲۰ است.

گزارهٔ p: تهران در ایران است.
گزارهٔ q: تهران در آسیا است.
⟵ گزارهٔ $p \vee q$: تهران در ایران است یا تهران در آسیا است. (به طور خلاصه تهران در ایران یا آسیا است.)

جدول ارزش‌گذاری $p \vee q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$p \vee q$ وقتی درست است که حداقل یکی از دو گزاره درست باشند.

$p \vee q$ فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

مثال و پاسخ

مثال **ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است از جدول ارزش‌گذاری استفاده کنید:**

الف **۱۳ عدد اول یا مربع کامل است.**

ب **معادلهٔ $x^2 - ۱۶ = ۰$ دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است.**

پ **$(۳ > ۱۰) \vee (۵^\circ \neq ۱)$**

ت **۱ عدد اول است یا x زوج است.**

پاسخ

الف ۱۳ عدد اول (T) یا مربع کامل (F) است. ⇐ کل گزاره، درست (T) است. (۱۳ جذر کامل ندارد.)

ب ابتدا معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم: $x^2 - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^2 = ۱۶ \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm ۴$ (پس معادله ۲ ریشه دارد.)

ضمناً ۴۹ بر ۷ بخش‌پذیر است لذا:

معادلهٔ $x^2 - ۱۶ = ۰$ دو ریشه دارد (T) یا ۴۹ مضرب ۷ است (T). ⇐ کل گزاره، درست (T) است.

پ می‌دانیم هر عدد به توان صفر برسد، جواب برابر ۱ می‌شود؛ لذا: $۵^\circ = ۱$

$(۳ > ۱۰)$ (F) $\vee$ $(۵^\circ \neq ۱)$ (F) ⇐ کل گزاره، نادرست (F) است.

ت می‌دانیم ۱ عددی اول نیست (یک فقط فرد است نه اول.) ولی در مورد ارزش گزارهٔ «x زوج است.» نمی‌توانیم اظهار نظر قطعی کنیم؛ چون مقدار x را نمی‌دانیم؛ لذا باید جدول ارزش‌گذاری رسم کنیم:

۱ عدد اول است یا x زوج است.	x زوج است.	۱ عدد اول است.
T	T	F
F	F	F

مثال و پاسخ

مثال **جدول ارزش‌گذاری گزارهٔ $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را تشکیل دهید.**

پاسخ

همیشه جدول را از چپ به راست تشکیل می‌دهیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

خاصیت‌های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q

یک سری قانون برای ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره وجود دارند که یادگیری آن‌ها سرعت محاسبات را افزایش می‌دهد. البته تمام این قوانین و فرمول‌ها را می‌توانیم به کمک رسم جدول ارزش‌گذاری، اثبات کنیم ولی ما فقط آن‌هایی را ثابت می‌کنیم که ممکن است در مدارس جنبهٔ امتحانی داشته باشند. (در تمام فرمول‌های زیر، منظور از T گزارهٔ همیشه درست و منظور از F گزارهٔ همیشه نادرست است.)

		قوانین مربوط به ترکیب فصلی	قوانین مربوط به ترکیب عطفی	
فقط این‌ها را حفظ کنید.		$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	فقط این‌ها را حفظ کنید
		$p \vee T \equiv T$ یا $T \vee p \equiv T$	$p \wedge T \equiv p$ یا $T \wedge p \equiv p$	
		$p \vee F \equiv p$ یا $F \vee p \equiv p$	$p \wedge F \equiv F$ یا $F \wedge p \equiv F$	
		$p \vee \sim p \equiv T$ یا $\sim p \vee p \equiv T$	$p \wedge \sim p \equiv F$ یا $\sim p \wedge p \equiv F$ اجتماع نقیضین	
		$p \vee q \equiv q \vee p$ جابه‌جایی	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ جابه‌جایی	
مخصوص علاقه‌مندان	شرکت‌پذیری	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ شرکت‌پذیری	مخصوص علاقه‌مندان
	توزیع‌پذیری	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ توزیع‌پذیری	
	دمُرگان	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ دمُرگان	
	جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ جذب	
	شبه‌جذب	$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ شبه‌جذب	

همان‌طور که گفتیم تمام این فرمول‌ها توسط جدول ارزش‌گذاری، قابل اثبات است؛ مثلاً قانون جذب $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ را اثبات می‌کنیم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

ملاحظه می‌کنید که ارزش گزارهٔ $p \wedge (p \vee q)$ همیشه با ارزش p برابر است. برخی دیگر از فرمول‌های بالا را در تمرین‌ها اثبات کرده‌ایم.

مثال و پاسخ

مثال بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید: (T و F به ترتیب گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست هستند.)

الف) $\sim p \vee \sim F \equiv ?$

ب) $\sim p \wedge F \equiv ?$

پ) $\sim (\sim p) \wedge \sim p \equiv ?$

ت) $(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) \equiv ?$

ث) $(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv ?$ (مخصوص علاقه‌مندان)

ج) $q \vee \sim (p \vee \sim q) \equiv ?$ (مخصوص علاقه‌مندان)

پاسخ دقت کنید که نقیض F می‌شود T و نقیض T می‌شود F؛ لذا خواهیم داشت:

الف) $\sim p \vee \sim F \equiv \sim p \vee T \equiv T$

ب) $\sim p \wedge F \equiv F$

پ) $\underbrace{\sim(\sim p)}_{P} \wedge \sim p \equiv \underbrace{p \wedge \sim p}_{\text{اجتماع نقیضین}} \equiv F$

ت) $\underbrace{(\sim p \wedge F)}_{F} \vee \underbrace{(\sim p \vee T)}_{T} \equiv F \vee T \equiv T$

ث) $(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge (p \vee q) \overset{\text{شبه جذب}}{\equiv} \sim p \wedge q$

ج) $q \vee \underbrace{\sim(p \vee \sim q)}_{\text{دمرگان}} \equiv q \vee \underbrace{(\sim p \wedge q)}_{\text{جذب}} \equiv q$

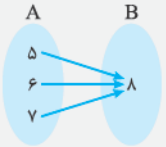
سؤال‌های امتحانی

۳- در جدول زیر، روبه‌روی گزاره‌های داده‌شده ارزش آن‌ها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده‌شده با یک یا دو گزارهٔ ساده، گزارهٔ مرکب را کامل کنید:

ردیف	گزارهٔ مرکب	درست	نادرست
۱	۷۵ عددی اول است و $(-۳)^۴$ عددی منفی نیست.		
۲	..... و رنگ چشم افراد، متغیر کیفی اِسمی است.	✓	
۳	مقسوم‌علیه‌های (شمارنده‌های) طبیعی عدد ۱۲ عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و		✓
۴	۱۲۱ مضرب ۱۱ است و $\frac{۱}{۲} > \frac{۱}{۳}$		
۵	..... و	✓	
۶	همهٔ سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شوند و سورهٔ بقره طولانی‌ترین سورهٔ قرآن است.		
۷	مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ تهی است و $\{۰,۱,۲,۳\} \subseteq \mathbb{N}$		
۸	$\frac{۱}{۸} = ۳^{-۳} \times ۳^{-۳}$ و $(\frac{-۲}{۳})^{-۳} = ۳ + ۱۰ = \sqrt{۹+۱۰۰}$		
۹	$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$ و $(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$		
۱۰	(شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است) ∧ (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی‌های مُخرّب است.) *(مخصوص علاقه‌مندان)*		
۱۱	$(-۵ \neq -\sqrt{(-۵)^۲}) \wedge ((\frac{۲}{۳})^۰ = ۱)$		
۱۲	عدد ۲ زوج و اول است.		
۱۳	نمودار خط $x = ۳$ از ناحیهٔ اول و چهارم می‌گذرد. *(مخصوص علاقه‌مندان)*		

۴- در جدول زیر، روبه‌روی گزاره‌های داده‌شده، ارزش آن‌ها را با علامت ✓ مشخص کرده و هم‌چنین با توجه به ارزش داده‌شده، با یک گزارهٔ ساده، گزارهٔ مرکب را کامل کنید:

ردیف	گزارهٔ مرکب	درست	نادرست
۱	کسر $\frac{\sqrt{x}}{x+۱}$ عبارتی گویا است یا ۹۱ عددی مرکب است.		
۲	قرآن ۱۱۸ سوره دارد یا	✓	

۳	ارسطو نویسندهٔ کتاب ارغنون نیست یا		✓
۴	..... یا معادلهٔ $x^۲+x+۳=۰$ دو ریشه دارد.	✓	
۵	افلاطون، شاگردِ سقراط بود یا هفته هفت روز دارد.		
۶	اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱ ۲ ۱) هستند یا سهمی $f(x)=x^۲+۱$ ماکزیمم دارد. (مخصوص علاقه‌مندان)		
۷	در تابع $f(t)=\sqrt{t+۱}$ متغیر مستقل برابر $f(t)$ است یا وزن افراد، متغیر کمّی فاصله‌ای است.		
۸	رابطهٔ  تابع است یا نمودار میله‌ای، یک نمودار تک‌متغیره است.		
۹	$(\frac{۱}{۲}\in\mathbb{Z})\vee(\mathbb{R}\not\subset\mathbb{Q})$		
۱۰	$(\frac{۲^۳\times۳^{-۲}}{۲^{-۵}\times۳^۴}\times\frac{۶^۷}{۸^۵}=۲)\vee(\sqrt{x^۲}=\lvert x\rvert)$ (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۱	عدد ۱۹ زوج یا مربع کامل است.		
۱۲	عدد ۲۴ بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر است.		

۵- با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی یا نادرستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$ ب) $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ پ) $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

ت) $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ ث) $p\vee(p\wedge q)\equiv q$ ج) $p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q$

چ) $(p\vee\sim p)\equiv T$ ح) $(p\wedge\sim p)\equiv F$ خ) $(p\vee q)\wedge(p\vee\sim q)\equiv p$

د) $p\wedge(\sim p\wedge\sim q)\equiv T$ ذ) $p\wedge\sim(p\vee q)\equiv F$

۶- اگر $p\wedge q$ گزاره‌ای درست باشد ارزش گزارهٔ $p\vee(q\wedge r)$ را تعیین کنید.

۷- اگر $p\wedge q\equiv F$ باشد ثابت کنید که: $(\sim p\vee q)\wedge p\equiv F$ (مخصوص علاقه‌مندان)

۸- اگر گزارهٔ $\sim p\vee(p\wedge\sim q)$ نادرست باشد، ارزش گزاره‌های زیر چیست؟

الف) $p\vee(q\vee r)$ ب) $\sim r\wedge\sim(p\wedge q)$

۳ گزارهٔ شرطی و دوشرطی

ترکیب شرطی دو گزاره

اگر بخواهیم از گزارهٔ p، گزارهٔ q را نتیجه بگیریم، از نماد «$\Rightarrow$» استفاده کرده و می نویسیم: $p\Rightarrow q$ و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

- اگر p آن‌گاه q.
- p نتیجه می‌دهد q را.
- q از p نتیجه می‌شود.
- p شرط کافی است برای q
- q شرط لازم است برای p

بچه‌های عزیز، این دو مورد در کتاب درسی‌تان مطرح نشده است ولی بدانید بهتر است.

ضمناً در گزارهٔ «$p\Rightarrow q$» به p مقدم و به q تالی می‌گوییم.

مثلاً گزارهٔ شرطی «اگر یک چهارضلعی، مستطیل باشد، آن‌گاه قطرهایش با هم برابرند.» را به شکل‌های زیر هم می‌توان بیان کرد:

- مستطیل بودن یک چهارضلعی (p)، نتیجه می‌دهد مساوی بودن قطرهای آن را (q).

- مستطیل بودن یک چهارضلعی (p)، شرط کافی است برای مساوی بودن قطرهای آن (q).
- (دو قطرش با هم برابرند.) (q) $\Rightarrow$ (چهارضلعی، مستطیل است.) (p)
- مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی (q)، شرط لازم است برای مستطیل بودن آن (p).

در گزارهٔ شرطی بالا p و q به هم وابسته هستند؛ یعنی با فرض درست‌بودن گزارهٔ «چهارضلعی، مستطیل است.» درستی یا نادرستی گزارهٔ «قطرهای چهارضلعی با هم برابرند» را بررسی می‌کنیم؛ ولی در علم منطق، گاهی p و q ربطی به هم ندارند که در این صورت باید ارزش تک‌تک آن‌ها را تعیین کنیم؛ مثلاً اگر ۵ < ۳ باشد (گزارهٔ p (نادرست))، آن‌گاه تهران پایتخت ایران است (گزارهٔ q (درست)). ملاحظه می‌کنید که گزاره‌های p و q ارتباطی به هم ندارند؛ پس نمی‌توانیم بدون بررسی بگوییم p درست است. *(دیدید که ۵ < ۳ نادرست بود، یعنی حتماً باید بررسی کنیم و چشم‌بسته نمی‌گیم p درسته، ولی اگه p و q به هم وابسته بودن، چشم‌بسته می‌گیم p درسته و فقط q رو بررسی می‌کنیم.)*

جدول ارزش‌گذاری $(p \Rightarrow q)$ به صورت مقابل است:

مقدم p	تالی q	$(p \Rightarrow q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$(p \Rightarrow q)$ فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

به دو ردیف آخر جدول بالا دقت کنید. ملاحظه می‌کنید که در هر دو حالت، مقدم ارزش نادرست دارد ولی ارزش $(p \Rightarrow q)$ درست است. در این دو حالت، می‌گوییم گزارهٔ شرطی به اِنتفای مقدم، درست است. یعنی به خاطر نادرست‌بودن مقدم، می‌گوییم تالی چه درست باشد چه نادرست، کل گزاره درست است.

مثال و پاسخ

مثال ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف اگر ۱۳ اول است، آن‌گاه ۲۵ مربع کامل است.

ب اگر $۴^۲ = ۸$: آن‌گاه ۳ < ۷.

پ اگر چهارمین فصلِ سال، پاییز است؛ آن‌گاه اسفند ۳۱ روز دارد.

ت اگر x عددی زوج باشد: آن‌گاه بر ۲ بخش‌پذیر است.

ث زوج‌بودن عدد ۴ نتیجه می‌دهد اول‌بودن عدد ۸ را.

پاسخ: پس $(p \Rightarrow q)$ درست است. (الف) (۱۳ اول است.) (T) $\Rightarrow$ (۲۵ مربع کامل است.) (T)

پس $(p \Rightarrow q)$ به اِنتفای مُقدم، درست است. (ب) $(۴^۲ = ۸)$ (F) $\Rightarrow$ $(۷ > ۳)$ (T)

پس $(p \Rightarrow q)$ به اِنتفای مُقدم، درست است. (پ) (چهارمین فصل سال، پاییز است.) (F) $\Rightarrow$ (اسفند ۳۱ روز دارد.) (F)

(ت) (x عددی زوج است.) (T) $\Rightarrow$ (x بر ۲ بخش‌پذیر است.) (T)

پس $(p \Rightarrow q)$ درست است. دقت کنید که در این گزارهٔ شرطی، مقدم و تالی به هم وابستگی دارند؛ لذا p را چشم‌بسته درست فرض کرده‌ایم؛ ولی تالی را پس از بررسی، گفتیم که درست است. *(می‌دونید که هر عدد زوجی بر ۲ بخش‌پذیره، پس تالی درسته)*

پس $(p \Rightarrow q)$ نادرست است. (ث) (۴ زوج است.) (T) $\Rightarrow$ (۸ عدد اول است.) (F)

مثال و پاسخ

مثال اگر p گزاره‌ای نادرست، q گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. *(مشابه تمرین کتاب صفحهٔ ۱۱)*

الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r$ ب) $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$

پ) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ ت) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$

چون p همیشه نادرست است، می‌توانیم به جایش از F استفاده کنیم. q هم همواره درست است؛ پس به جای آن از T استفاده می‌کنیم:

پاسخ:

الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv \underbrace{(F \Rightarrow T)}_{T} \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$

ب) $(\sim p \vee q) \Rightarrow r \equiv \underbrace{(T \vee T)}_{T} \Rightarrow r \equiv T \Rightarrow r \equiv r$

تذکر در گزارهٔ $(T \Rightarrow r)$ اگر r درست باشد، به گزارهٔ $(T \Rightarrow T)$ می‌رسیم که درست است؛ ولی اگر r نادرست باشد به گزارهٔ $(T \Rightarrow F)$ می‌رسیم که نادرست است؛ پس همه چیز، بستگی به ارزش r دارد؛ به همین دلیل گفتیم ارزش $(T \Rightarrow r)$ با ارزش r برابر است.

پ) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv F \Rightarrow \underbrace{(T \wedge r)}_{r} \equiv F \Rightarrow r \equiv T$

گزارهٔ $(F \Rightarrow r)$ به انتفای مقدم، همیشه درست است؛ یعنی r چه درست باشد چه نادرست، ارزش کل گزارهٔ $(F \Rightarrow r)$ درست است.

ت) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv \underbrace{(F \Rightarrow r)}_{\text{T به انتفای مقدم}} \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T$

نکتهٔ مهم اگر p و q دو گزارهٔ دلخواه باشند؛ آن‌گاه رابطهٔ هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ همواره برقرار است. برای اثبات این فرمول از جدول ارزش‌گذاری استفاده می‌کنیم:

(در مدرسه نیاز به حفظ فرمول نیست، فقط اثبات به کمک جدول از شما خواسته می‌شه.)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

عکس یک گزارهٔ شرطی در گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ اگر جای مقدم و تالی را با هم عوض کنیم، به گزارهٔ $(q \Rightarrow p)$ می‌رسیم که به آن، عکس گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ می‌گوییم.

عکس نقیض گزارهٔ شرطی به گزارهٔ $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ عکسِ نقیضِ گزارهٔ $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

مثال و پاسخ

مثال به کمک جدول ارزش‌گذاری، ثابت کنید هر گزاره‌ای به شکل $(p \Rightarrow q)$ با عکسِ نقیضِ خود یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم‌ارز است.

پاسخ: می‌خواهیم درستی هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ را اثبات کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ترکیب دو شرطی گزاره‌های p و q در ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ دیدید که از گزارهٔ p گزارهٔ q را نتیجه گرفتیم. حال می‌خواهیم هم از p، گزارهٔ q را نتیجه بگیریم و هم از q گزارهٔ p را. به چنین گزارهٔ مرکبی ترکیب دوشرطی p و q می‌گوییم و آن را با نماد $(p \Leftrightarrow q)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت ساده‌تر، گزارهٔ $(p \Leftrightarrow q)$ همان گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ می‌باشد. یعنی ترکیب عطفیِ دو گزاره شرطی است.

ضمناً گزارهٔ $(p \Leftrightarrow q)$ را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

- p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را.
- p اگر و تنها اگر q.
- اگر p آن‌گاه q و اگر q آن‌گاه p.
- اگر p آن‌گاه q و برعکس.
- p شرط لازم و کافی است برای q.

مثلاً گزارهٔ « اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویه‌اش با هم مساوی‌اند و برعکس.» را می‌توان به شکل‌های زیر هم بیان کرد:

p q

- مثلث، متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر دو زاویه‌اش با هم مساوی باشند.
- متساوی‌الساقین‌بودن یک مثلث نتیجه می‌دهد مساوی‌بودن دو زاویه‌اش را و مساوی‌بودن دو زاویهٔ یک مثلث، نتیجه می‌دهد متساوی‌الساقین‌بودن آن مثلث را.
- متساوی‌الساقین‌بودن یک مثلث، شرط لازم و کافی است برای مساوی‌بودن دو زاویهٔ آن.
- (دو زاویه‌اش با هم برابرند.) $\Leftrightarrow$ (مثلث، متساوی‌الساقین است.)

جدول ارزش‌گذاری گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

نتیجهٔ جدول: گزارهٔ $(p \Leftrightarrow q)$ فقط وقتی درست (T) است که دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

مثال و پاسخ

مثال **درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید:**

الف **اگر $\sqrt{3}$ گنگ است: آن‌گاه ۳ عددی طبیعی است و برعکس.**

ب **رابطهٔ $f = \{(1,a),(2,3),(1,b)\}$ تابع است اگر و تنها اگر $a = b$.**

پ **اگر دو عدد مساوی باشند: آن‌گاه مربع‌هایشان نیز مساوی‌اند و برعکس.**

ت **$(15 < 7) \Leftrightarrow (3^3 = 27)$.**

ث **طبیعی‌بودن عدد (-3) شرط لازم و کافی است برای گنگ‌بودن عدد $3/8$.**

ج **منفی‌بودن دلتا نتیجه می‌دهد ریشه‌نداشتن معادلهٔ درجه‌دوم را و ریشه‌نداشتن معادلهٔ درجه‌دوم، نتیجه می‌دهد منفی‌بودن دلتا را.**

پاسخ **الف**

$(\underbrace{3 \text{ عددی طبیعی است.}}_{T}) \Leftrightarrow (\underbrace{\sqrt{3} \text{ گنگ است.}}_{T})$

دو گزاره، هم‌ارزش‌اند؛ پس کل گزارهٔ بالا، درست (T) است.

ب دقت کنید که در این سؤال، p و q به هم وابسته هستند؛ ضمناً چون گزارهٔ موردنظر، دوشرطی است، یک بار $(p \Rightarrow q)$ و بار دیگر $(q \Rightarrow p)$ را در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت هم، مقدم را درست فرض می‌کنیم و فقط ارزش تالی را مشخص می‌کنیم. اگر در هر دو حالت، تالی‌ها نیز درست بودند، $p \Leftrightarrow q$ درست خواهد بود. می‌دانید اگر f تابع باشد، چون زوج‌های $(1,a)$ و $(1,b)$ عضو اولشان مساوی است، عضوهای دومشان هم باید مساوی باشند؛ یعنی $a = b$.

حالت ۱: $\underbrace{f = \{(1,a),(2,3),(1,b)\} \text{ تابع است}}_{\text{مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم.}} \Rightarrow \underbrace{a = b}_{\text{تالی درست است.}}$

حالت ۲: $\underbrace{a = b}_{\text{مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم.}} \Rightarrow \underbrace{f = \{(1,a),(2,3),(1,b)\} \text{ تابع است}}_{\text{تالی درست است.}}$

پس الان فهمیدیم که $(p \Rightarrow q)$ درست است و $(q \Rightarrow p)$ هم درست است؛ لذا $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ هم درست است. به طور ساده‌تر، چون در دو حالت بالا تالی‌ها درست بودند، نتیجه گرفتیم که $p \Leftrightarrow q$ نیز درست است.

شاگرد: من نفهمیدم چه وقت باید دو حالت بالا رو در نظر بگیریم استاد؟ چرا در قسمت (الف) این کارو نکردین؟

دبیر، در قسمت (الف) دو گزارهٔ «$\underbrace{\sqrt{3}}_{p}$ گنگ است.» و «$\underbrace{3}_{q}$ عددی طبیعی است.» ارتباطی با هم نداشتند، به همین دلیل برای بررسی درستی یا نادرستی $p \Leftrightarrow q$ نیازی به ایجاد ۲ حالت جدا از هم نبود، ولی در قسمت (ب)، p و q با هم ارتباط داشتند. به همین دلیل، دو حالت $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ رو با فرض درستی مقدم‌ها جداگانه بررسی کردیم. در هر دو حالت، کافی بود که تالی‌ها درست باشن.

ب باز هم p و q به هم وابسته‌اند؛ پس مانند قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

حالت ۱: (مربع‌هایشان مساوی‌اند ⇒ دو عدد مساوی باشند) — تالی: درست است؛ مقدم را درست فرض می‌کنیم

حالت ۲: (آن دو عدد مساوی‌اند ⇒ مربع‌های دو عدد مساوی باشند) — تالی: نادرست است؛ مقدم را درست فرض می‌کنیم

در حالت (۲) تالی نادرست شد؛ پس کل گزارهٔ $q \Leftrightarrow p$ نادرست است.

دقت دارید که ممکن است مربع‌های دو عدد مساوی باشند، ولی خود آن دو عدد، مساوی نباشند؛ مثلاً (-3) و $(+3)$ مربع‌هایشان برابرند (۹)؛ ولی خودشان برابر نیستند.

پ $\underbrace{(3^3 = 27)}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{(15 < 7)}_{F}$

دو گزاره ارتباطی با هم ندارند؛ پس نیازی نیست دو حالت جداگانه برای بررسی درستی یا نادرستی $p \Leftrightarrow q$ در نظر بگیریم.

خیلی سریع می‌گوییم $p \Leftrightarrow q$ نادرست است؛ چون p و q هم‌ارزش نیستند.

ت $\underbrace{(3 - \text{عددی طبیعی است.})}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{8} / 3 \text{ عددی گنگ است.})}_{F}$

باز هم دو گزاره، ارتباطی با هم ندارند؛ پس می‌گوییم چون دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش‌اند؛ لذا $p \Leftrightarrow q$ درست است.

ج (معادلهٔ درجه‌دوم ریشه ندارد) ⇔ (دلتا منفی باشد)

تالی‌ها درست‌اند پس کل گزاره هم درست است. →

حالت ۱: (معادلهٔ درجهٔ دوم، ریشه ندارد.) ⇒ (دلتا منفی باشد.) — تالی: T؛ مقدم را خودمان T فرض می‌کنیم.

حالت ۲: (دلتا منفی است.) ⇒ (معادلهٔ درجه دوم، ریشه ندارد) — تالی: T؛ مقدم را خودمان T فرض می‌کنیم.

یادآوری از سال قبل می‌دانید اگر در معادلهٔ درجه‌دوم، دلتا یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ منفی باشد، معادله جواب ندارد. هم‌چنین اگر معادلهٔ درجه‌دومی، جواب نداشته باشد، حتماً دلتای آن منفی بوده است.

سؤال‌های امتحانی

۹- جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزارهٔ مرکب	درست	نادرست
۱	اگر $(1+5^2)$ زوج است؛ آن‌گاه ۱۰۰ مربع کامل است.		
۲	اگر .....؛ آن‌گاه ۹۶ اول است.	✓	
۳	اگر ۵۰ مضرب ۱۰ است؛ آن‌گاه		✓
۴	اگر x عددی اول باشد؛ آن‌گاه x^2 هم عددی اول است.		
۵	اگر $\sqrt{16}$ مربع کامل است؛ آن‌گاه $2^3 < 3^2$.	✓	
۶	اگر ۲۵ مربع کامل ..... آن‌گاه $\sqrt{3}$ عددی گنگ		
۷	اگر a عدد صحیح زوج یا فرد باشد؛ آن‌گاه عدد ۱ اول است.		
۸	اگر k عددی فرد باشد؛ آن‌گاه k^2 نیز فرد است.		

۹	زوج‌بودن عدد ۱۰ نتیجه می‌دهد زوج‌بودن مربع هر عدد فرد را.		
۱۰	$(\sqrt{3})^{4}\times(\sqrt{3})^{-2}=3 \Rightarrow (\sqrt{(2-\sqrt{5})^{2}}=2-\sqrt{5})$ (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۱	$(3^{-10}<3^{-1}) \Rightarrow$ حجم کره $=\frac{4}{3}\pi R^{3}$ (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۲	اگر مُد داده‌های ۱,۱,۲,۳,۴ برابر ۱ باشد آن‌گاه حاصل $\frac{x^{3}+3x^{2}+2x}{(x^{2}+x)(x^{2}-4)}$ برابر با $\frac{1}{x+2}$ است. (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۳	اگر عدد ۵ اول و عدد ۱۰- طبیعی باشد؛ آن‌گاه عدد ۱/۸ گنگ است.		
۱۴	$[(-20\geq -12)\wedge((-5)^{3}=-125)] \Rightarrow$ جمعه‌ها بانک‌ها تعطیل هستند.		
۱۵	$[(2^{-5}=-32)\vee$ (میانه، نقطهٔ وسط داده‌های مرتب‌شده است$)] \Rightarrow$ دمای هوای شهرها متغیر کمّی نسبتی است.		
۱۶	$[$(خط $y=3$ افقی است$)\wedge$ (در نقاط سربه سر، سود / کارخانه صفر است$)] \Rightarrow$ (مقدار پارامتر همیشه با / مقدار آماره برابر است) (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۷	$\sim(2^{3}=18) \Rightarrow \sim(4\notin\mathbb{N})$		
۱۸	$\sim[(\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z})\wedge(\underbrace{IQR}_{\text{دامنهٔ میان چارکی}}=Q_{3}-Q_{1})] \Rightarrow$ (۲ فرد است) (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۹	در یک سری از داده‌ها، اگر دادهٔ دورافتاده داشته باشیم؛ آن‌گاه شاخص مرکزی میانه بهتر از میانگین است.		
۲۰	اگر در معادلهٔ $x^{2}+3kx-2k=0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر ۴ باشد، آن‌گاه مقدار k برابر ۲ است. (مخصوص علاقه‌مندان)		

۱۰- جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزارهٔ مرکب	درست	نادرست
۱	اگر عبارت $\frac{2x}{x-1}$ گویا باشد؛ آن‌گاه $\sqrt{3}$ گنگ است و برعکس.		
۲	اگر x عددی فرد باشد، $(x+1)$ عددی زوج است و برعکس.		
۳	اول‌بودن عدد ۳۷ شرط لازم و کافی است برای مرکب‌بودن عدد ۱۷.		
۴	گویابودن عدد ۱/۶ شرط لازم و کافی است برای	✓	
۵	اگر ..... آن‌گاه تقریباً ۲۵ درصد داده‌های آماری، کوچک‌تر از چارک اول هستند و برعکس.		✓
۶	اگر ۱۲۱ مضرب ۳ ..... آن‌گاه فردوسی، ریاضی‌دان ..... و برعکس.	✓	
۷	اگر واریانس داده‌ها صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها با هم برابرند و برعکس.		
۸	اگر دو عدد فرد باشند، آن‌گاه مجموع آن‌ها زوج است و برعکس.		
۹	$[(x=3)\wedge(y=-1)] \Leftrightarrow f=\{(5,x-y),(1,2),(5,4),(1,x+y)\}$ تابع است.		
۱۰	(در منحنی نرمال ٪۹۶ داده‌ها در بازه $(\bar{x}-2\sigma,\bar{x}+2\sigma)$ قرار دارند.) $\Leftrightarrow$ (مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}-x-2=0$ برابر ۱ است.) (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۱	(نمودار خط $y=-2x-1$ از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد) $\Leftrightarrow$ (در نمودار جعبه‌ای، میانه همیشه وسط جعبه قرار دارد) (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۲	(حاصل $\frac{a^{2}+2a}{a^{2}-4}+\frac{4-a}{2-a}$ برابر ۲ است) $\Leftrightarrow$ (در تجزیه‌شدهٔ $(x^{5}-81x)$ عامل $(x-3)$ وجود ندارد) (مخصوص علاقه‌مندان)		
۱۳	$(a\times b=0) \Leftrightarrow [(a=0)\wedge(b=0)]$		

۱۱- با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی یا نادرستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(p \Rightarrow p) \equiv T$ ب) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$ پ) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim p) \equiv F$

ت) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q \equiv F$ ث) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$ ج) $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

چ) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p \equiv T$

۱۲- اگر p، q و r سه گزارهٔ دلخواه باشند، جدول ارزش‌گذاری گزاره‌های زیر را رسم کنید:

الف) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ ب) $[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow r)]$

۱۳- اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را بدون رسم جدول، تعیین کنید. (جواب هم‌ارزی‌ها را بنویسید.)

الف) $(q \Leftrightarrow p) \vee r \equiv ?$ ب) $(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv ?$ پ) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv ?$

ت) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv ?$ ث) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \equiv ?$ ج) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \equiv ?$

چ) $(q \vee \sim r) \Rightarrow p \equiv ?$ ح) $\sim (\sim q \vee \sim r) \Rightarrow r \equiv ?$ خ) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \equiv ?$

د) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv ?$ ذ) $\sim (\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv ?$ ر) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim r \equiv ?$

۱۴- اگر گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow p$ نادرست باشد ارزش $p \wedge \sim q$ را به دست آورید.

۱۵- اگر گزارهٔ $(q \vee r) \Rightarrow p$ نادرست باشد ارزش گزارهٔ $(p \wedge s) \Rightarrow r$ را تعیین کنید. (p، q، r و s چهار گزارهٔ دلخواه هستند.)

۱۶- بدون استفاده از جدول ارزش‌گذاری، ثابت کنید که: $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$ *(مخصوص علاقمندان)*

۱۷- اگر $p \Rightarrow q$ نادرست و $\sim r \Rightarrow \sim s$ نیز نادرست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید: (r و s دو گزارهٔ دلخواه هستند.)

الف) $(s \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow p)$ ب) $q \Rightarrow (p \vee \sim s)$

۱۸- اگر $p \wedge q \equiv T$ باشد، ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p) \sim$ را تعیین کنید.

۴ استدلال ریاضی

در سه درس‌نامهٔ قبلی با انواع گزاره‌ها و ارزش‌گذاری آن‌ها آشنا شدید. در این درس‌نامه می‌خواهیم چند روش مهم برای استدلال‌کردن را آموزش دهیم. البته این روش‌ها را در درس منطق خود نیز مشاهده کرده‌اید؛ پس بحث جدیدی نیست. قبل از این‌که وارد بحث استدلال‌ها شویم، باید نحوهٔ تبدیل گزاره‌های فارسی به نمادهای ریاضی را یاد بگیرید. سال گذشته در مبحث معادلات درجه‌اول، درجه‌دوم و معادلات گویا، متغیر را x می‌گرفتیم و با توجه به توضیحات مسئله، یک معادله می‌ساختیم.

در معادلاتی که پارسال خواندید، معمولاً فقط یک متغیر مثل x وجود داشت؛ ولی در گزاره‌های ریاضی، ممکن است دو یا چند متغیر هم وجود داشته باشد.

مثال و پاسخ

مثال گزاره‌های فارسی زیر را به نمادهای ریاضی تبدیل کنید:

الف ثلث عددی برابر است با ۴ برابر مربع آن عدد.

ب ۳ درصد قیمت فروش خودرو، برابر سود آن است.

پ قدرمطلق تفاضل دو عدد حقیقی، بزرگ‌تر از حاصل‌ضرب آن دو عدد است.

ت مجموع دو عدد گویا، کوچک‌تر از مجموع مربعات آن‌ها است.

پاسخ **الف** عدد موردنظر را x فرض کرده؛ لذا ثلث آن می‌شود $\frac{x}{3}$ و مربع آن می‌شود x^2؛ پس چنین می‌نویسیم: $\frac{x}{3} = 4x^2$

ب اگر قیمت فروش و قیمت خرید خودرو را به ترتیب x و y فرض کنیم، می‌دانیم سود برابر است با $(x - y)$؛ از طرفی گفته شده، سود برابر با $\frac{3}{100}$ قیمت فروش است؛ یعنی برابر با $\frac{3}{100}x$؛ پس می‌توان این‌طور نوشت: $x - y = \frac{3}{100}x$

پ این دو عدد حقیقی را x و y می‌نامیم ($\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است.)

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x - y| > x.y \quad \text{یا} \quad |y - x| > x.y$$

دقت کنید که در ریاضی، عبارت‌های $|x - y|$ و $|y - x|$ فرقی با هم ندارند.

ت اگر این دو عدد گویا را x و y بنامیم خواهیم داشت: ($\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا است.) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y < x^2 + y^2$

استدلال استثنایی (قیاس استثنایی)

این استدلال را به شکل‌های زیر می‌توان بیان کرد ($\therefore$ نماد نتیجه‌گیری است.):

مقدمهٔ ۱: اگر الف آن‌گاه ب	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$	مقدمهٔ ۱: $p \Rightarrow q$
مقدمهٔ ۲: الف	(نتیجه ← q، مقدمهٔ ۲ ← p، مقدمهٔ ۱ ← $p \Rightarrow q$)	مقدمهٔ ۲: p
$\therefore$ ب		$\therefore q$

به مثال زیر دقت کنید:

مقدمهٔ ۱: اگر امروز جمعه باشد (p)، آن‌گاه به مدرسه نمی‌روم (q).

مقدمهٔ ۲: امروز جمعه است (p).

نتیجه ← امروز به مدرسه نمی‌روم (q).

نکته نتیجهٔ استدلال استثنایی در صورتی قرص و محکم است که مقدمهٔ ۱ از نظر علمی و منطقی درست باشد. در غیر این صورت، به نتیجهٔ آن اعتمادی نیست. البته صرف‌نظر از نتیجه، این روش استدلال‌کردن، همیشه درست است. به مثال زیر توجه کنید:

مقدمهٔ ۱: اگر روزی ۱۰ صفحه درس بخوانید، آن‌گاه در رشتهٔ حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شوید.

مقدمهٔ ۲: علی روزی ۱۰ صفحه درس می‌خواند.

نتیجه ← علی در رشتهٔ حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شود.

گفتیم این نوع استدلال، از لحاظ ساختاری درست است؛ ولی نمی‌توانیم بگوییم نتیجهٔ به دست آمده حتماً درست است؛ چون مقدمهٔ ۱ ممکن است درست نباشد؛ یعنی نمی‌توان به طور قطعی گفت هر کس روزی ۱۰ صفحه درس بخواند، در رشتهٔ حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شود. شاید یک نفر با روزی ۵ صفحه و فردی دیگر با روزی ۱۰۰ صفحه مطالعه، بتواند در این رشته قبول شود.

مثال و پاسخ

مثال **از مقدمهٔ ۱ و ۲ که در زیر آمده، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این نتیجه حتماً درست است؟**

مقدمهٔ ۱: اگر قیمت کاغذ بالا برود، آن‌گاه قیمت کتاب زیاد می‌شود.

مقدمهٔ ۲: کاغذ گران شد.

پاسخ نتیجه این است که قیمت کتاب هم گران می‌شود. بله این نتیجه درست است؛ چون مقدمهٔ ۱ از نظر منطقی درست است.

مغالطه: گاهی اوقات از استدلال استثنایی به شکلی نادرست استفاده می‌شود که به آن مغالطه یا سَفْسَطِه یا مَغْلَطِه می‌گوییم. در مغالطه، نحوهٔ نتیجه‌گیری به این صورت است:

مقدمهٔ ۱: $p \Rightarrow q$

مقدمهٔ ۲: q

$\therefore p$

به عنوان مثال:

مقدمهٔ ۱: اگر کسی از من متنفر باشد (p)، آن‌گاه پشت سر من حرف می‌زند (q).

مقدمهٔ ۲: رضا پشت سر من حرف می‌زند (q).

نتیجه ← رضا از من متنفر است (p).

نتیجهٔ به دست آمده، ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی این نوع استدلال در علم منطق، نادرست است.

البته نتیجهٔ مغالطه گاهی اوقات درست است؛ به مثال زیر توجه کنید:

مقدمهٔ ۱: اگر کسی در امتحان به تمام سؤالات، جواب درست بدهد، آن‌گاه نمره‌اش ۲۰ می‌شود.

مقدمهٔ ۲: نمرهٔ علی در ریاضی ۲۰ شده است.

نتیجه‌گیری طبق مغالطه: علی به تمام سؤالات درس ریاضی، درست جواب داده است.

ملاحظه می‌کنید که نتیجهٔ حاصل در این مثال، قطعاً درست است؛ ولی باز هم تأکید می‌کنم که طبق قرارداد کتاب درسی‌تان، این نوع استدلال‌کردن، نادرست است. *(در این زمینه، میان دانشمندان علم منطق هم اختلاف نظر وجود دارد.)*

مثال و پاسخ

مثال **طبق مغالطه، از مقدمهٔ ۱ و ۲ زیر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این نتیجه درست است؟ آیا این روش نتیجه‌گیری (استدلال) درست است؟**

مقدمهٔ ۱: اگر کسی در رشتهٔ ریاضی درس بخواند، آن‌گاه ذهنش خوب کار می‌کند.

مقدمهٔ ۲: زهرا ذهنش خوب کار می‌کند.

پاسخ از مغالطه نتیجه می‌گیریم که زهرا در رشتهٔ ریاضی درس می‌خواند. این نتیجه ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی این روش استدلال‌کردن، طبق مفاهیم کتاب درسی‌تان، نادرست است.

استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای اثبات آن گزاره

حتماً یادتان هست که در مواقعی که در گزارهٔ $p \Rightarrow q$ مقدم و تالی به هم وابسته بودند، مقدم را خودمان درست (T) فرض می‌کردیم و درستی یا نادرستی تالی را بررسی می‌کردیم. گاهی اوقات اثبات به این روش کمی دشوار است. ما همواره می‌توانیم به جای اثبات $p \Rightarrow q$ ، گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ را اثبات کنیم؛ زیرا ارزش گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ یکسان است؛ یعنی این گزاره‌ها هم‌ارز هستند.

به عنوان مثال می‌خواهیم ثابت کنیم که « با فرض آن‌که $n \in \mathbb{Z}$ است، اگر $\underbrace{n^2 \text{ زوج باشد}}_{p}$، آن‌گاه $\underbrace{n \text{ هم زوج است}}_{q}$. »

الان اثبات $p \Rightarrow q$ بسیار دشوار است؛ پس $\sim q \Rightarrow \sim p$ را اثبات می‌کنیم؛ یعنی:

اگر n زوج نباشد (فرد باشد) $\Rightarrow$ n^2 هم زوج نیست (فرد است.)

باز هم مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم؛ یعنی الان می‌دانیم n فرد است. اعداد فرد را به شکل $2k+1$ نمایش می‌دهیم $(k \in \mathbb{Z})$؛ لذا:

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = \underbrace{4k^2+4k}_{\text{فاکتور از } 2} + 1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{m} + 1 = 2m+1$$

پس ثابت کردیم که n^2 هم عددی فرد است. (در این‌گونه سؤالات همیشه از عدد ۲ فاکتور می‌گیریم و داخل پرانتز را m می‌نامیم. اگر به $2m$ رسیدیم، می‌گوییم عدد زوج است. اگر به $2m+1$ یا $2m-1$ رسیدیم، می‌گوییم عدد فرد است.)

یافتن محل خطا در محاسبات

خیلی وقت‌ها بدون توجه به اصول اولیهٔ علم ریاضی، مسئله‌ای را حل می‌کنیم و به نتیجهٔ غلط می‌رسیم. الان می‌خواهیم چند نمونه از این اشتباهات متداول را بررسی کنیم. مهم این است که خودتان بتوانید مکان وقوع خطا را پیدا کرده و بتوانید علت را توضیح دهید؛ مثلاً دانش‌آموزی ادعا می‌کند که معادلهٔ $x^2 - x = 0$ فقط یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است. استدلال او (محاسبات او) به شکل زیر بوده است. می‌خواهیم مکان وقوع خطا را به وی نشان دهیم تا دیگر مرتکب آن نشود:

معادلهٔ اصلی: $x^2 - x = 0 \xrightarrow[\text{فاکتورگیری}]{\text{مرحلهٔ ۱}} x(x-1) = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم دو طرف بر } x]{\text{مرحلهٔ ۲}} \frac{x(x-1)}{x} = \frac{0}{x} \xrightarrow[\text{ساده‌سازی}]{\text{مرحلهٔ ۳}} x - 1 = 0 \xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مرحلهٔ ۴}} x = 1$

اشتباه او در مرحلهٔ ۲ رخ داده است. در ریاضی نمی‌توانیم دو طرف معادله را بر یک متغیر تقسیم کنیم؛ چون ممکن است آن متغیر (در این‌جا x) صفر باشد. اگر x صفر باشد، مخرج کسرها صفر شده و به عبارت‌های تعریف‌نشده می‌رسیم. اگر فرض می‌کردیم که $x \neq 0$ است *(یعنی خود طراح می‌گفت $x \neq 0$ است)*، محاسبات این دانش‌آموز خطایی نداشت.

مثال و پاسخ

مثال **دانش‌آموزی گزارهٔ « $a < b \Rightarrow ac < bc$ » را که در آن a، b و c اعداد حقیقی‌اند به صورت زیر اثبات کرده است. ایراد این استدلال کجا است؟**

$$a < b \xrightarrow[\text{جمع دو طرف با } c]{\text{مرحلهٔ ۱}} a + c < b + c \xrightarrow[\text{ضرب دو طرف در } c]{\text{مرحلهٔ ۲}} c(a+c) < c(b+c) \xrightarrow[\text{ضرب } c \text{ در پرانتزها}]{\text{مرحلهٔ ۳}} ac + c^2 < bc + c^2 \xrightarrow[\text{حذف } c^2 \text{ از دو طرف}]{\text{مرحلهٔ ۴}} ac < bc \quad \text{(فرضِ درست)}$$

پاسخ اشتباه این دانش‌آموز در مرحلهٔ ۲ است؛ چون می‌دانیم که اگر عددی مثل c مثبت باشد، با ضرب دو طرف نامعادله در c جهت عوض نمی‌شود؛ ولی اگر c منفی باشد با ضرب دو طرف نامعادله در c جهت عوض می‌شود، ولی در فرض سؤال، گفته شده c عددی حقیقی است؛ یعنی هم می‌تواند مثبت باشد، هم منفی و هم صفر؛ لذا چون تکلیف علامت c معلوم نیست، نمی‌توانیم دو طرف نامعادلهٔ $a + c < b + c$ را در c ضرب کنیم. *(حتی اگه c صفر هم باشه، باز هم نمی‌تونیم دو طرف رو در c ضرب کنیم؛ چون به نامساوی $0 < 0$ می‌رسیم که اشتباهه.)* اگر در صورت سؤال گفته می‌شد $c > 0$ است، اشتباه او اصلاح می‌شد.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) جملهٔ داده‌شده، امری است و خبری نمی‌باشد؛ پس گزاره نیست.

ب) جملهٔ داده‌شده گزاره نیست؛ چون هر کسی در مورد بسیار بزرگ بودن 10^4 می‌تواند برداشت خاصی داشته باشد؛ یعنی ممکن است یک نفر بگوید 10^4 خیلی بزرگ است و نفر دیگر بگوید 10^4 اصلاً بزرگ نیست؛ پس ارزش‌گذاری این جمله، امکان‌پذیر نبوده و لذا گزاره نیست.

پ) گزاره است و درست می‌باشد؛ زیرا: $1, 3, 4, \underbrace{8, 17}, 20, 31, 54$

$$\text{میانه} = \frac{8+17}{2} = \frac{25}{2} = 12/5$$

ت) گزارهٔ نادرست است. از نمودار حُبابی معمولاً برای نمایش هم‌زمان ۳ متغیر استفاده می‌شود.

ث) گزاره است ولی ارزش آن نامعلوم است؛ یعنی درستی یا نادرستی آن، بستگی به مقدار a دارد. *(الان فقط می‌دونیم a طبیعیه ولی نمی‌دونیم زوجه یا فرد.)*

ج) گزارهٔ نادرست است؛ چون مثلاً اگر $n=1$ باشد؛ آن‌گاه: $(-3)^{n+1} = (-3)^2 = 9$

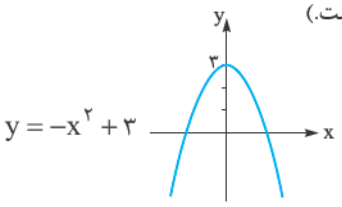
چ) گزارهٔ درست است؛ چون بزرگ‌ترین عددِ اولِ دورقمی، ۹۷ است.

ح) گزارهٔ درست است؛ چون به خاطر وجود $|x|$ عبارت $\frac{|x|}{3x^2+5x}$ گویا نیست.

خ) گزارهٔ درست است؛ چون عضوهای اول زوج‌مرتب‌ها، همگی مختلف‌اند.

د) گزارهٔ نادرست است؛ چون بُرد تابع $y=3$ برابر $\{3\}$ است. (دامنهٔ تابع $y=3$ برابر کل اعداد حقیقی است.)

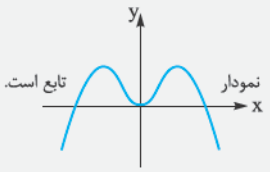
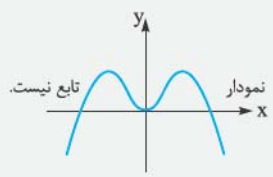
ذ) گزارهٔ نادرست است؛ زیرا این سهمی از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.



ر) گزارهٔ درست است. چون اولاً تعداد هلی‌کوپترهای کشورها قابل مقایسه‌اند؛ ثانیاً اختلاف هر دوی آن‌ها با معنی است و ثالثاً نسبت هر دو مقدار آن‌ها نیز بامعنی است.

ز) گزارهٔ نادرست است؛ چون انحراف معیار جذر واریانس است.

۲-

ارزش ~p	گزارهٔ ~p	ارزش p	گزارهٔ p
T	$10^3+10^4 \neq 10^7$	F	$10^3+10^4=10^7$ **توضیح** اگر به جای + علامت × داشتیم، رابطهٔ بالا درست می‌شد؛ یعنی: $10^3\times10^4=10^7$
F	مربع هر عددِ حقیقیِ منفی، عددی مثبت نیست.	T	مربعِ هر عدد حقیقیِ منفی، عددی مثبت است.
T	$-8 \geq -10$	F	$-8 < -10$
T	 **توضیح** هر خط عمودی دلخواه (هر خط موازی محور عرض‌ها) نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس نمودار، تابع است.	F	
F	مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر 2^4 نیست.	T	مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر 2^4 است. **توضیح** مجموع اعداد سطر nاُم مثلث خیام 2^{n-1} است؛ پس مجموع اعداد سطر پنجم برابر $2^4=2^{5-1}$ است.

T	طول رأس سهمی $y=x^۲-۸x+۵$ برابر با ۳ نیست.	F	طول رأس سهمی $y=x^۲-۸x+۵$ برابر با ۳ است. توضیح طول رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ برابر $x=\frac{-b}{۲a}$ است؛ لذا در گزارهٔ داده‌شده خواهیم داشت: $x=\frac{-(-۸)}{۲(۱)}=۴$
F	در تجزیهٔ $۴x^۲-۸x-۲۱$ عامل $(۲x+۳)$ وجود ندارد. توضیح $\underbrace{(۲x)^۲-۴(۲x)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}-۲۱=(۲x-۷)(۲x+۳)$	T	در تجزیهٔ $۴x^۲-۸x-۲۱$ عامل $(۲x+۳)$ وجود دارد.
F	در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰، ۲۸۰۰ و ۵ برای نمایش محل تمرکز داده‌ها، میانه بهتر از میانگین نیست.	T	در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰، ۲۸۰۰ و ۵ برای نمایش محل تمرکز داده‌ها شاخص میانه بهتر از میانگین است. توضیح چون دادهٔ ۵ دورافتاده است (از بقیهٔ داده‌ها خیلی کوچک‌تر است)، شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین است.
F	مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج نیست. (عددی فرد است.)	T	مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج است.
T	قرینهٔ هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد نیست.	F	قرینهٔ هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد است. توضیح مثلاً قرینهٔ ۵− می‌شود ۵ که کوچک‌تر از ۵− نیست؛ پس گزارهٔ داده‌شده نادرست است.
F	معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ از خود آن عدد، کوچک‌تر نیست.	T	معکوس هر عدد طبیعیِ بزرگ‌تر ۱ از خود آن عدد، کوچک‌تر است. توضیح مثلاً معکوس ۲ می‌شود $\frac{۱}{۲}$ که از خودِ ۲ کوچک‌تر است؛ یا معکوس ۱۰ میشود $\frac{۱}{۱۰}$ که از خود ۱۰ کوچک‌تر است. برای هر عدد طبیعیِ بزرگ‌تر ۱ این خاصیت وجود دارد؛ پس گزارهٔ بالا درست است.
T	مجموع دو عدد $\sqrt{۳}-۱$ و $\sqrt{۳}+۱$ عددی گنگ نیست.	F	مجموع دو عدد $\sqrt{۳}-۱$ و $\sqrt{۳}+۱$ عددی گنگ است. توضیح جمع این دو عدد گویا است؛ زیرا: $\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱=۲$

۳- ردیف ۱: $\underbrace{\text{۷۵ عددی اول است}}_{F}$ و $\underbrace{(-۳)^۴ \text{ عددی منفی نیست}}_{T}$. ⇐ در کل نادرست است.

ردیف ۲: چون «گزارهٔ رنگ چشم افراد، کیفی اِسمی است.» گزاره‌ای درست است؛ پس باید در جای خالی، گزاره‌ای درست قرار دهیم تا ارزش کل گزارهٔ عطفی درست شود. در جای خالی، هر گزارهٔ درستِ دلخواهی می‌توان قرار داد؛ مانند: «۲ عددی اول است.»

ردیف ۳: گزارهٔ «مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ عبارت‌اند از: ۱و۲،۳،۴،۶،۱۲» درست است؛ پس برای آن‌که کل گزارهٔ عطفی نادرست باشد باید در جای خالی، یک گزارهٔ نادرستِ دلخواه قرار دهیم؛ مثلاً: «۵ عددی زوج است»

ردیف ۴: $\underbrace{\text{۱۲۱ مضرب ۱۱ است}}_{T}$ و $\underbrace{\frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۳}}_{T}$ ⇐ کل گزاره درست است.

ردیف ۵: باید دو گزارهٔ دلخواه درست مثال بزنیم تا کل گزاره، درست شود. ۴ عددی طبیعی است و $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

ردیف ۶: $\underbrace{\text{همهٔ سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شوند}}_{F(\text{سورهٔ توبه با بسم‌الله شروع نمی‌شود.})}$ و $\underbrace{\text{سورهٔ بقره طولانی‌ترین سورهٔ قرآن است.}}_{T}$ ⇐ پس در کل، گزاره نادرست است.

ردیف ۷: مجموعهٔ $\{\emptyset\}$ تهی است (F: مجموعهٔ $\{\emptyset\}$ یک عضو دارد و تهی نیست.) و $\{0,1,2,3\} \subseteq \mathbb{N}$ (F: صفر، عدد طبیعی نیست.) ⇐ پس کل گزاره نادرست است.

ردیف ۸: $(\frac{1}{8} = 3^{-3} \times (-\frac{2}{3})^{-3}$ (F) و $\sqrt{9+100} = 3+10$ ⇐ در کل نادرست است. (F: بین ۹ و ۱۰۰ جمع است و نمی‌توانیم آن‌ها را تک‌تک از رادیکال خارج کنیم، اگر ضرب یا تقسیم بود می‌شد.)

$$(-\frac{3}{2})^3 \times \frac{1}{3^3} = (-\frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{1}{\cancel{3}})^3 = (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$$

ردیف ۹: هر دو اتحاد داده‌شده درست هستند؛ پس کل گزاره درست است.

ردیف ۱۰: گزارهٔ «شیب هر خطِ موازی محور عرض‌ها صفر است.» نادرست است.

(شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است) (F: شیب هر خط عمودی، تعریف‌نشده است.) ∧ (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی‌های مخرب است) (T)

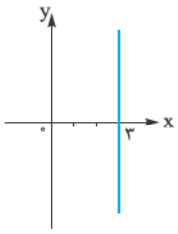
پس در کل، این گزاره نادرست است.

ردیف ۱۱: $((\frac{2}{3})^0 = 1)$ (T) $\wedge$ $(\sqrt{(-5)^2} \neq -5)$ (F) پس این گزاره، در کل نادرست است. دقت کنید که هر عدد به توان صفر برسد جواب ۱ است.

ضمناً: $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$

ردیف ۱۲: عدد ۲، هم زوج است و هم اول؛ پس گزارهٔ موردنظر، درست است.

ردیف ۱۳: نمودار خط $x = 3$ به شکل مقابل است:



ملاحظه می‌کنید که این خط از نواحی اول و چهارم می‌گذرد؛ پس گزارهٔ داده‌شده، درست است.

۴- ردیف ۱: کسر $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ گویا است (F) یا ۹۱ عددی مرکب است. (T: ۹۱ بر ۷ و ۱۳ بخش‌پذیر است.) ⇐ کل گزاره، درست است.

ردیف ۲: قرآن ۱۱۸ سوره دارد (F: قرآن ۱۱۴ سوره دارد) یا آخرین پیامبر الهی، حضرت محمد (ص) بود. (T) ⇐ کل گزاره، درست است.

طبق فرض سؤال، کل گزاره باید درست باشد به همین علت، یک گزارهٔ سادهٔ درست، در جای خالی قرار دادیم؛ چون می‌دانیم که $T \vee F \equiv T$

ردیف ۳: ارسطو نویسندهٔ کتاب ارغنون نیست (F) یا ۲ عددی فرد است. (F) ⇐ کل گزاره نادرست است.

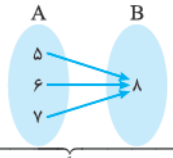
ردیف ۴: ۳ عددی اول است (T) یا معادلهٔ $x^2 + x + 3 = 0$ دو ریشه دارد. (F: دلتای معادله منفی است پس ریشه ندارد.) ⇐ کل گزاره درست است.

در جای خالی، گزارهٔ درست قرار دادیم؛ زیرا می دانیم که: $T \vee F \equiv T$

ردیف ۵: افلاطون شاگرد سقراط بود (T) یا هفته هفت روز دارد. (T) ⇐ کل گزاره درست است.

ردیف ۶: اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱ ۲ ۱) هستند (T) یا سهمی $y=x^2+1$ ماکزیمم دارد. (F: ضریب x^2 مثبت است؛ پس سهمی مینیمم دارد.) ⇐ کل گزاره درست است.

ردیف ۷: در تابع $f(t) = \sqrt{t+1}$ متغیر مستقل $f(t)$ است (F: t متغیر مستقل و $f(t)$ متغیر وابسته است.) یا وزن افراد، کمّی فاصله‌ای است. (F: وزن، متغیر کمّی نسبتی است.) ⇐ پس کل گزاره نادرست است.

ردیف ۸: رابطهٔ 

T (از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شده)
تابع است یا نمودار میله‌ای، یک نمودار تک‌متغیره است. ⇐ کل گزاره، درست است.
T

ردیف ۹: $\underbrace{(\frac{1}{2}\in\mathbb{Z})}_{F}\vee\underbrace{(\mathbb{R}\not\subset\mathbb{Q})}_{T}$ ⇐ کل گزاره، درست است.

ردیف ۱۰: می‌دانیم $\sqrt[4]{x^4}=|x|$ یعنی هرگاه عبارتی از رادیکال با فرجهٔ زوج خارج شود، باید از قدرمطلق استفاده کنیم؛ پس چون یک گزاره از دو گزارهٔ سادهٔ داده‌شده درست است، می‌توانیم گزارهٔ دیگر را بررسی نکنیم و بلافاصله بگوییم ارزش کل گزارهٔ فصلی درست است ولی برای تمرین بیشتر، گزارهٔ دیگر را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\frac{2^3\times3^{-2}}{2^{-5}\times3^4}\times\frac{(2\times3)^7}{(2^3)^5}=\frac{2^3\times2^5}{3^2\times3^4}\times\frac{2^7\times3^7}{2^{15}}=\frac{\cancel{2^{15}}\times3^7}{3^6\times\cancel{2^{15}}}=3$$

$$\underbrace{(\frac{2^3\times3^{-2}}{2^{-5}\times3^4}\times\frac{6^7}{8^5}=2)}_{F}\vee\underbrace{(\sqrt{x^2}=|x|)}_{T}$$ ⇒ کل گزاره درست است.

ردیف ۱۱: عدد ۱۹ زوج $\underbrace{\text{یا}}_{F}$ ۱۹ مربع کامل است. ⇐ در کل، نادرست است.

ردیف ۱۲: عدد ۲۴ بر ۳ بخش‌پذیر است $\underbrace{\text{یا}}_{T}$ ۲۴ بر ۵ بخش‌پذیر است. ⇐ در کل، درست است.

۵- الف)

p	q	~p	~q	p∧q	~(p∧q)	~p∨~q
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

پس هم‌ارزی داده شده، درست است. (قانون دمرگان است.)

ب)

p	q	~p	~q	p∨q	~(p∨q)	~p∧~q
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

لذا هم‌ارزی موردنظر، درست است. (قانون دمرگان است.)

پ)

p	q	r	q∨r	p∧(q∨r)	p∧q	p∧r	(p∧q)∨(p∧r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

هم‌ارزی داده شده، درست است.

ت)

p	q	r	q ∧ r	p ∨ (q ∧ r)	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

همارزی داده شده، درست است.

ث)

p	q	p ∧ q	p ∨ (p ∧ q)
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

پس همارزی $p \vee (p \wedge q) \equiv q$ نادرست است.

ج)

p	q	~ p	~ p ∨ q	p ∧ (~ p ∨ q)	p ∧ q
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

همارزی داده شده، درست است.

چ)

p	~ p	p ∨ ~ p
T	F	T
F	T	T

پس همارزی $(p \vee \sim p) \equiv T$ درست است.

ح)

p	~ p	p ∧ ~ p
T	F	F
F	T	F

پس همارزی $(p \wedge \sim p) \equiv F$ درست است.

خ)

p	q	~ q	p ∨ q	p ∨ ~ q	(p ∨ q) ∧ (p ∨ ~ q)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

پس همارزی داده شده، درست است.

د)

p	q	~ p	~ q	~ p ∧ ~ q	p ∧ (~ p ∧ ~ q)
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F

پس همارزی داده‌شده نادرست است.

ذ)

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$p \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

پس هم‌ارزی داده شده، درست است.

۶- $p \wedge q$ درست است؛ پس هم p درست است هم q؛ لذا:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv T \vee \underbrace{(T \wedge r)}_{r} \equiv T \vee r \equiv T$$

۷-

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \text{ :خاصیت توزیع‌پذیری}$$

$$\underbrace{(\sim p \vee q) \wedge p}_{\text{جابه‌جا می‌کنیم}} \equiv \underbrace{p \wedge (\sim p \vee q)}_{\text{خاصیت توزیع‌پذیری}} \equiv \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \vee \underbrace{(p \wedge q)}_{F} \equiv F$$

۸- گفته شده ارزش $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ نادرست است؛ پس هم $\sim p$ نادرست است و هم $(p \wedge \sim q)$. از نادرستی $\sim p$ نتیجه می‌گیریم که p درست است؛ لذا برای آن‌که $(p \wedge \sim q)$ نادرست باشد، باید $\sim q$ نادرست باشد؛ پس خود q درست است، پس در کل می‌توان گفت:

$$\begin{cases} p \equiv T \\ \sim p \equiv F \\ q \equiv T \\ \sim q \equiv F \end{cases}$$

ارزش r نامعلوم است. (مهم هم نیست.)

الف) $(q \vee r) \vee p \equiv \underbrace{(T \vee r)}_{T} \vee T \equiv T \vee T \equiv T$

ب) $\sim(p \wedge q) \wedge \sim r \equiv \sim \underbrace{(T \wedge T)}_{T} \wedge \sim r \equiv \sim T \wedge \sim r \equiv F \wedge \sim r \equiv F$

۹- در تمام ردیف‌ها، دقت کنید که در گزارهٔ شرطی، فقط اگر به $T \Rightarrow F$ رسیدیم، گزارهٔ شرطی نادرست خواهد بود.

ردیف ۱: $\underbrace{(۵^۲ + ۱) \text{ زوج است}}_{T} \Rightarrow \underbrace{۱۰۰ \text{ مربع کامل است}}_{T}$ ← کلاً درست است.

ردیف ۲: $\underbrace{۲ \text{ فرد است}}_{F} \Rightarrow \underbrace{۹۶ \text{ اول است}}_{F}$

(۹۶ مرکب است؛ چون مثلاً بر ۲ بخش‌پذیر است.)

پس در جای خالی، گزاره‌ای نادرست قرار دادیم (۲ فرد است)؛ چون می‌دانیم ارزش $F \Rightarrow F$ برابر T است.

ردیف ۳: $\underbrace{۵۰ \text{ مضرب ۱۰ است}}_{T} \Rightarrow \underbrace{۳ \text{ عددی گنگ است}}_{F}$

در جای خالی، گزارهٔ نادرستِ (۳ عددی گنگ است) را قرار دادیم تا به $T \Rightarrow F$ برسیم؛ چون می‌دانیم که: $T \Rightarrow F \equiv F$

ردیف ۴: مقدم و تالی به هم وابسته هستند؛ پس مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم و تالی را بررسی می‌کنیم. اگر x عددی اول مثل ۳ باشد، آن‌گاه $x^۲$ دیگر اول نیست؛ چون $x^۲$ برابر ۹ می‌شود که مرکب است. در مورد تمام اعداد اول دیگر هم، همین اتفاق می‌افتد؛ پس:

$\underbrace{x \text{ اول است}}_{T} \Rightarrow \underbrace{x^۲ \text{ اول است}}_{F}$ ← کلاً نادرست است.

ردیف ۵: $\underbrace{\sqrt{۱۶} \text{ مربع کامل است}}_{T} \Rightarrow \underbrace{۳^۲ > ۲^۳}_{T}$ ← کلاً درست است.

(عدد ۴ مربع کامل است.)

ردیف ۶: گفته شده، گزارهٔ $p \Rightarrow q$ باید نادرست باشد؛ پس گزارهٔ p باید درست و q باید نادرست باشد. پس در جای خالی اول، کلمهٔ «است» و در جای خالی بعدی، کلمهٔ «نیست» قرار می‌دهیم.

ردیف ۷: $\underbrace{(a \text{ عدد صحیح زوج یا فرد است})}_{T} \Rightarrow \underbrace{(۱ \text{ عدد اول است})}_{F}$ ← کلاً نادرست است.

(عدد ۱ نه اول است نه مرکب.) (چون یک عدد صحیح بالاخره یا زوج است یا فرد.)

ردیف ۸: مقدم و تالی به هم وابسته هستند؛ پس خودمان مقدم را درست فرض می‌کنیم و فقط درستی یا نادرستی تالی را بررسی می‌کنیم:

$\underbrace{(k \text{ عددی فرد است})}_{\text{خودمان } T \text{ فرض می‌کنیم.}} \Rightarrow \underbrace{(k^۲ \text{ فرد است})}_{T}$ ← کلاً درست است.

توجه دارید که هر عدد فردی را که به توان ۲ برسانید، جواب باز هم فرد می‌شود؛ مثلاً:

$$۵^۲ = ۲۵, (-۳)^۲ = ۹$$

ردیف ۹: کلاً نادرست است. ← $\underbrace{\text{مربع هر عدد فرد، زوج است}}_{F} \Rightarrow \underbrace{\text{عدد ۱۰ زوج است}}_{T}$

ردیف ۱۰: می‌دانید که $\sqrt{x^2}=|x|$؛ لذا:

$(\sqrt{3})^4\times(\sqrt{3})^{-2}=(\sqrt{3})^{4-2}=(\sqrt{3})^2=|3|=3$:از طرفی

$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=|\overline{2-\sqrt{5}}|=-(2-\sqrt{5})=-2+\sqrt{5}$

متن سؤال: $\underbrace{\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=2-\sqrt{5}}_{F} \Rightarrow \underbrace{(\sqrt{3})^4\times(\sqrt{3})^{-2}=3}_{T}$ ← کلاً درست است.

ردیف ۱۱: می‌دانیم که: $\frac{1}{3^1}=3^{-1}$ و $\frac{1}{3^{10}}=3^{-10}$؛ پس مخرج کسر $\frac{1}{3^{10}}$ بزرگ‌تر از مخرج کسر $\frac{1}{3}$ بوده و لذا $\frac{1}{3^{10}}<\frac{1}{3}$.

متن سؤال: $\underbrace{3^{-10}<3^{-1}}_{T} \Rightarrow \underbrace{\text{حجم کره}=\frac{4}{3}\pi R^3}_{T}$ ← کلاً درست است.

ردیف ۱۲:

$$\frac{\overbrace{x^3+3x^2+2x}^{\text{فاکتور از } x}}{\underbrace{(x^2+x)(x^2-4)}_{\text{اتحاد مزدوج فاکتور از } x}}=\frac{\cancel{x}(x^2+3x+2)}{\cancel{x}(x+1)(x-2)\cancel{(x+2)}}=\frac{1}{x-2}$$

از طرفی مُد داده‌های ۱،۱،۲،۳،۴ برابر ۱ است؛ لذا:

کلاً نادرست است. ← $\underbrace{\text{(حاصل } \frac{x^3+3x^2+2x}{(x^2+x)(x^2-4)} \text{ برابر با } \frac{1}{x+2} \text{ است)}}_{F} \Rightarrow \underbrace{\text{(مد داده‌های (۱،۱،۲،۳،۴) برابر ۱ است)}}_{T}$

ردیف ۱۳: کلاً درست است. ← $\underbrace{\left[\underbrace{\text{(۵ عدد اول است)}}_{T} \wedge \underbrace{\text{(۱۰- طبیعی است)}}_{F}\right]}_{F} \Rightarrow \underbrace{\text{(عدد ۱/۸ گنگ است)}}_{F}$

ردیف ۱۴: کلاً درست است. ← $\underbrace{\left[\underbrace{(-20\geq -12)}_{F} \wedge \underbrace{((-5)^3=-125)}_{T}\right]}_{F} \Rightarrow \underbrace{\text{(جمعه‌ها بانک‌ها تعطیل‌اند)}}_{T}$

ردیف ۱۵:

کلاً نادرست است. ← $\underbrace{\left[\underbrace{(2^{-5}=-32)}_{F} \vee \underbrace{\text{(میانه، نقطهٔ وسط داده‌های مرتب شده است)}}_{T}\right]}_{T} \Rightarrow \underbrace{\text{(دمای هوای شهرها، متغیر کمّی نسبتی است)}}_{F}$

تذکر دمای هوای شهرها، متغیر کمّی فاصله‌ای است.

ردیف ۱۶: سال گذشته خواندید که پارامتر و آماره، لزوماً مساوی نیستند. ضمناً در نقاط سربه‌سر، سود کارخانه صفر است و هر خط به شکل $y=k$ افقی است.

$$\underbrace{\text{(مقدار پارامتر، همیشه با مقدار آماره برابر است)}}_{F} \Rightarrow \underbrace{\left[\underbrace{\text{(خط } y=3 \text{ افقی است)}}_{T} \wedge \underbrace{\text{(در نقاط سربه‌سر، سود کارخانه صفر است)}}_{T}\right]}_{T}$$

پس گزارهٔ بالا در کل، درست است.

ردیف ۱۷: $\sim(2^3=18) \Rightarrow \sim(4\notin\mathbb{N})$

اگر گزاره‌های داخل پرانتزها را نقیض کنیم خواهیم داشت:

$\underbrace{2^3\neq 18}_{T} \Rightarrow \underbrace{4\in\mathbb{N}}_{T}$ کلاً درست است.

ردیف ۱۸: مقدم را باید نقیض کنیم. برای این کار از قانون دمرگان استفاده می‌کنیم؛ یعنی $\sim$ را به تک‌تک گزاره‌ها اثر می‌دهیم و «$\wedge$» تبدیل به «$\vee$» می‌شود:

$$\left[\sim(\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z})\vee\sim(\text{IQR}=Q_3-Q_1)\right] \Rightarrow \text{(۲ فرد است.)} \equiv \underbrace{(\underbrace{\mathbb{N}\not\subset\mathbb{Z}}_{F} \vee \underbrace{\text{IQR}\neq Q_3-Q_1}_{F})}_{F} \Rightarrow \underbrace{\text{(۲ فرد است.)}}_{F}$$

پس کلاً درست است. ←

ردیف ۱۹: مقدم و تالی به هم وابستگی دارند؛ لذا مقدم را T فرض کرده و فقط تالی را بررسی می‌کنیم:

کلاً درست است. ← $\underbrace{\text{(میانه بهتر از میانگین است)}}_{T} \Rightarrow \underbrace{\text{(اگر دادهٔ دورافتاده داشته باشیم)}}_{\text{خودمان } T \text{ فرض می‌کنیم}}$

ردیف ۲۰: ابتدا با توجه به این‌که حاصل‌ضرب ریشه‌ها ۴ است، خودمان مقدار k را به دست می‌آوریم: $x^2+3kx-2k=0$

$$\text{ضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{-2k}{1}=4\Rightarrow k=-2$$

$$\underbrace{\left(\begin{matrix}\text{در معادلهٔ } x^2+3kx-2k=0\\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر ۴ است}\end{matrix}\right)\Rightarrow \underbrace{(k=2)}_{F}}_{\text{خودمان T فرض می‌کنیم}}$$ ← کلاً نادرست است.

۱۰- ردیف ۱: اگر $\underbrace{\frac{2x}{x-1}}_{T}$ گویا باشد، آن‌گاه $\underbrace{\sqrt{3}}_{T}$ گنگ است و برعکس ← کاملاً درست است. (دو گزاره هم‌ارزش هستند.)

ردیف ۲: اگر x عددی فرد باشد، آن‌گاه $(x+1)$ عددی زوج است و برعکس.

باید دو حالت را در نظر بگیریم؛ چون دو گزارهٔ سادهٔ بالا به هم ارتباط دارند:

حالت ۱: $\underbrace{x \text{ فرد باشد}}_{\text{خودمان T فرض می‌کنیم}}\Rightarrow \underbrace{(x+1) \text{ زوج است}}_{T}$

حالت ۲: $\underbrace{(x+1) \text{ زوج است}}_{\text{خودمان T فرض می‌کنیم}}\Rightarrow \underbrace{x \text{ فرد است}}_{T}$

} ← کلاً درست است.

در هر دو حالت، تالی‌ها درست شدند؛ زیرا در حالت اول اگر x فرد باشد، مثلاً ۳ باشد، $(x+1)$ می‌شود ۴ که زوج است (به x هر عدد فردی بدهید $x+1$ زوج می‌شود) برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی اگر $x+1$ زوج باشد، x فرد است؛ مثلاً اگر $x+1=6$ باشد، آن‌گاه $x=5$.

ردیف ۳: $\underbrace{\text{اول بودن عدد ۳۷}}_{T}$ شرط لازم و کافی است برای $\underbrace{\text{مرکب بودن ۱۷}}_{F}$ ← کلاً نادرست است. (دو گزاره هم‌ارزش نیستند.)

ردیف ۴: برای آن‌که کل گزارهٔ دوشرطی درست شود، باید در جای خالی، گزاره‌ای دلخواه ولی درستی را قرار دهیم تا ارزش هر دو گزاره، یکسان شود.

$\underbrace{\text{گویا بودن عدد } 1/6}_{T}$ شرط لازم و کافی است برای $\underbrace{\text{زوج بودن عدد ۸}}_{T}$ ← کلاً درست است.

ردیف ۵: می خواهیم ارزش کل گزاره نادرست شود. از طرفی ارزش گزارهٔ «۲۵ درصد داده‌های آماری کوچک‌تر از چارک اول هستند» درست است؛ پس در جای خالی باید گزاره‌ای نادرست قرار دهیم تا دو گزاره، هم‌ارزش نشوند. ما به دلخواه در جای خالی، گزارهٔ «$\sqrt{5}$ عددی گویا است» را قرار می‌دهیم.

ردیف ۶: چون ارزش کل گزاره باید درست باشد، دو گزارهٔ سادهٔ ما، باید هم‌ارزش باشند (یا هر دو درست یا هر دو نادرست).

می‌دانیم ۱۲۱ بر ۳ بخش‌پذیر نیست و فردوسی هم شاعر بوده است نه ریاضی‌دان؛ پس این سؤال ۲ جواب دارد. (هر کدام را که بنویسید اِشکالی ندارد.)

اگر $\underbrace{\text{۱۲۱ مضرب ۳ است}}_{F}$، آن‌گاه $\underbrace{\text{فردوسی، ریاضی‌دان بوده است.}}_{F}$ ← کلاً درست

اگر $\underbrace{\text{۱۲۱ مضرب ۳ نیست}}_{T}$، آن‌گاه $\underbrace{\text{فردوسی، ریاضی‌دان نبوده است.}}_{T}$ ← کلاً درست

ردیف ۷: اگر واریانس داده‌ها صفر باشد آن‌گاه داده‌ها با هم برابرند و برعکس.

باید ۲ حالت در نظر بگیریم؛ چون گزاره‌های سادهٔ موجود در گزارهٔ دوشرطی بالا به هم وابستگی دارند:

حالت ۱: $\underbrace{(\text{واریانس}=0)}_{\text{خودمان T فرض می‌کنیم}}\Rightarrow \underbrace{\text{داده‌ها برابرند}}_{T}$

حالت ۲: $\underbrace{\text{داده‌ها برابر باشند}}_{\text{خودمان T فرض می‌کنیم}}\Rightarrow \underbrace{(\text{واریانس}=0)}_{T}$

} ← کلاً درست است.

ردیف ۸: باز هم دو گزارهٔ سادهٔ وابسته به هم داریم؛ لذا:

حالت ۱: $\underbrace{\text{دو عدد فرد باشند}}_{T}\Rightarrow \underbrace{\text{مجموع آن‌ها زوج است}}_{T}$

حالت ۲: $\underbrace{\text{مجموع دو عدد زوج باشد}}_{T}\Rightarrow \underbrace{\text{دو عدد فرد هستند}}_{F}$

} ← کلاً نادرست است.

در حالت ۱ همیشه تالی درست است؛ ولی در حالت ۲ ممکن است مجموع دو عدد زوج باشد، ولی خود آن دو عدد فرد نباشند؛ مثلاً اگر مجموع دو عدد برابر ۱۰ باشد، آن‌گاه خود آن دو عدد می‌توانند ۴ و ۶ باشند.

ردیف ۹: می‌دانیم اگر f تابع باشد، عضوهای اول زوج‌مرتب‌ها نباید مساوی باشند یا اگر مساوی بودند، عضوهای دومشان هم مساوی باشند. اگر در f به جای x و y به ترتیب ۳ و ۱− که داده شده را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f=\{\overbrace{(5,4)}^{\text{تکراری}},(1,2),\overbrace{(5,4)}^{\text{تکراری}},(1,2)\} \Rightarrow$$ پس f تابع است.

پس کل گزارهٔ دوشرطی داده‌شده درست است. *(اگه مثل قسمت‌های ۷ و ۸ دو حالت براش تشکیل بدین تالی‌ها درست میشن.)*

ردیف ۱۰: $\underbrace{\text{در منحنی نرمال ۹۶٪ داده‌ها در بازهٔ } (\bar{x}-2\sigma\,,\,\bar{x}+2\sigma) \text{ قرار دارند.}}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{\text{(مجموع ریشه‌های معادلهٔ } x^2-x-2=0 \text{ برابر ۱ است)}}_{T}$

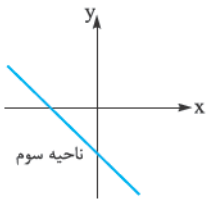
پس کلاً درست است. توجه کنید که مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم از رابطهٔ $x'+x''=\frac{-b}{a}$ به دست می‌آید؛ پس در معادلهٔ $x^2-x-2=0$ داریم:

$$x'+x''=\frac{-(-1)}{1}=1$$

ردیف ۱۱: $\underbrace{\text{(نمودار خط } y=-2x-1 \text{ از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد)}}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{\text{(درنمودار جعبه‌ای، میانه همیشه وسط جعبه قرار دارد)}}_{F}$

پس کلاً درست است. حواستان باشد که در نمودار جعبه‌ای، میانه لزوماً در وسط جعبه نیست.

ضمناً اگر نمودار خط $y=-2x-1$ را به روش سریع رسم کنیم به شکل روبه‌رو خواهیم رسید:



ردیف ۱۲: ابتدا عبارت x^5-81x را تجزیه می‌کنیم:

$$\underbrace{x^5-81x}_{\text{فاکتور از } x}=x\underbrace{(x^4-81)}_{\text{مزدوج}}=x\underbrace{(x^2-9)}_{\text{مزدوج}}(x^2+9)=x(x-3)(x+3)(x^2+9)$$

پس عامل $(x-3)$ در تجزیه‌شدهٔ این عبارت وجود دارد. حال جمع داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a^2+2a}{(a-2)(a+2)}-\frac{4-a}{a-2}=\frac{a^2+2a-(4-a)(a+2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{a^2+2a-4a-8+a^2+2a}{(a-2)(a+2)}=\frac{2a^2-8}{(a-2)(a+2)}$$

$$=\frac{2(a^2-4)}{(a-2)(a+2)}=\frac{2(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+2)}=2$$

پس کل گزارهٔ مرکب، نادرست است؛ چون دو گزارهٔ سادهٔ آن، هم‌ارزش نیستند.

ردیف ۱۳: اگر گزارهٔ داده‌شده را $p \Leftrightarrow q$ فرض کنیم، گزاره‌های سادهٔ p و q به هم وابسته هستند؛ لذا ۲ حالت جداگانه در نظر می‌گیریم. یک بار $p \Rightarrow q$ و یک بار $q \Rightarrow p$:

حالت ۱: $\underbrace{a\times b=0}_{\text{خودمان T فرض می‌کنیم}} \Rightarrow \underbrace{(a=0)\wedge(b=0)}_{F}$

حالت ۲: $\underbrace{(a=0)\wedge(b=0)}_{\text{خودمان T فرض می‌کنیم}} \Rightarrow \underbrace{a\times b=0}_{T}$

} در کل نادرست است.

توجه کنید که ممکن است $a\times b=0$ باشد؛ ولی فقط a یا فقط b صفر باشند؛ یعنی لزومی ندارد a و b هم‌زمان صفر باشند. به همین دلیل در حالت (۱)، تالی نادرست است.

۱۱- الف)

p	p	$p \Rightarrow p$
T	T	T
F	F	T

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

ب)

p	q	$\sim q$	$p\wedge\sim q$	$p\Rightarrow q$	$(p\wedge\sim q)\vee(p\Rightarrow q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

پ)

p	q	~p	p∧q	p∨~p	(p∧q) ⇒ (p∨~p)
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	T

هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

ت)

p	q	~p	p∨q	(p∨q)∧~p	[(p∨q)∧~p] ⇒ q
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

ث)

p	q	p ⇒ q	q∨p	(p ⇒ q)∧(q∨p)	[(p ⇒ q)∧(q∨p)] ⇔ q
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

ج)

p	q	~p	p⇔q	~p⇔q
T	T	F	T	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	F

پس هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

چ)

p	q	~p	~q	p ⇒ q	p ⇒ ~q	(p ⇒ q)∧(p ⇒ ~q)	[(p ⇒ q)∧(p ⇒ ~q)] ⇔ ~p
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T

پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

۱۲- الف)

p	q	r	q⇔r	p ⇒ (q⇔r)
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	T

ب)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$q \wedge (p \Rightarrow r)$	$[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow r)]$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F	T

۱۳-

الف) $(q \Leftrightarrow p) \vee r \equiv \underbrace{(F \Leftrightarrow T)}_{F} \vee r \equiv F \vee r \equiv r$

ب) $(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv \underbrace{(F \Leftrightarrow F)}_{T} \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$

پ) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv \underbrace{(T \Leftrightarrow F)}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{(T \Rightarrow F)}_{F} \equiv \underbrace{F \Leftrightarrow F}_{T} \equiv T$

ت) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \sim \underbrace{(T \vee F)}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{(T \Rightarrow F)}_{F} \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

ث) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \equiv \underbrace{(r \Leftrightarrow T)}_{r} \Rightarrow \underbrace{(T \wedge T)}_{T} \equiv r \Rightarrow T \equiv T$

ج) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \equiv \underbrace{(T \vee F)}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{(T \wedge F)}_{F} \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

چ) $(q \vee \sim r) \Rightarrow p \equiv \underbrace{(F \vee \sim r)}_{\sim r} \Rightarrow T \equiv \sim r \Rightarrow T \equiv T$

ح) $\sim (\sim q \vee \sim r) \Rightarrow r \equiv \sim \underbrace{(T \vee \sim r)}_{T} \Rightarrow r \equiv F \Rightarrow r \equiv T$

خ) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \equiv \underbrace{(T \Rightarrow T)}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{(F \Leftrightarrow T)}_{F} \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

د) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv \underbrace{(T \Rightarrow F)}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{(T \Rightarrow F)}_{F} \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

ذ) $\sim (\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv \sim \underbrace{(T \wedge \sim r)}_{\sim r} \Rightarrow \underbrace{(r \Rightarrow T)}_{T} \equiv r \Rightarrow T \equiv T$

ر) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim r \equiv \underbrace{(T \Rightarrow F)}_{F} \wedge \sim r \equiv F \wedge \sim r \equiv F$

۱۴- از نادرستی گزارهٔ $p \Rightarrow (p \wedge q)$ نتیجه می‌گیریم که مقدم آن یعنی p درست و تالی آن یعنی $(p \wedge q)$ نادرست است؛ پس الان p ارزش درست دارد و برای آن‌که $(p \wedge q)$ ارزش نادرست داشته باشد، باید q حتماً نادرست باشد. چون می دانیم حاصل $T \wedge F$ برابر F می‌شود:

$p \wedge \sim q \equiv T \wedge T \equiv T$

۱۵- چون $p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست است؛ پس p درست و $(q \vee r)$ نادرست است. هم‌چنین از نادرستی $(q \vee r)$ نتیجه می‌گیریم که هم q نادرست است و هم r. حال به سراغ گزارهٔ مطلوب می‌رویم:

$r \Rightarrow (p \wedge s) \equiv \overbrace{F \Rightarrow (T \wedge s)}^{\text{به انتفای مقدم، درست است}} \equiv T$

↓ ارزش s نامعلوم است

۱۶- در درس‌نامه گفتیم که: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ پس گزارهٔ شرطی را به فصلی تبدیل می‌کنیم:

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim \overbrace{(p \wedge q)}^{\text{مقدم، هر چه باشد نقیض می‌شود}} \vee (p \vee q)$

$\equiv$ دمرگان $\left[(\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \right] \equiv \left[\underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \vee \underbrace{(\sim q \vee q)}_{T} \right] \equiv T$

این دو را کنار هم می‌نویسیم

این دو را کنار هم می‌نویسیم