فهرست

فصل ۱ ماتریس و کاربردها

فصل ۲ آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل ۳ بردارها

آزمون‌های جامع

پاسخ‌نامه

ماتریس و کاربردها

(درس ۱)

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

هندسه ۳ — خیلی سبز

ماتریس، آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است که به هر عضو آن درایه می‌گوییم.

هر ماتریس از تعدادی سطر و تعدادی ستون تشکیل شده است. اگر ماتریس A، m سطر و n ستون داشته باشد، مرتبهٔ ماتریس A، $m\times n$ است و آن را به صورت $A_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

a_{ij} یعنی درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس A.

ماتریس مقابل دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، پس مرتبهٔ آن ۲ × ۳ است.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ A= & \left[\begin{matrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{matrix}\right] & \begin{matrix}\rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم}\end{matrix} \\ & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم}\end{matrix} & \end{array}$$

درایهٔ $a_{۲۱}$ را در نظر بگیرید! این درایه در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$، یک ماتریس ۲ × ۳ است (سه سطر و دو ستون دارد). در این ماتریس عدد ۴، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون اول است.

تست کدام گزینه ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ با شرایط $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ ۷ & i=j \\ i^{۲} & i<j \end{cases}$ را مشخص می‌کند؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۱) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۷ & ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۹ & ۷ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۷ & ۳ & ۴ & ۹ \\ ۱ & ۷ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ ۳ ماتریس A یک ماتریس ۴ × ۳ است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \end{bmatrix}$$

در جایی که شمارهٔ سطر و ستون با هم برابرند $(i=j)$ باید ۷ بگذاریم، در جایی که شمارهٔ سطر از شمارهٔ ستون کم‌تر است باید شمارهٔ سطر را به توان ۲ برسانیم و در ماتریس جایگزین کنیم. بنابراین داریم:

$$a_{۱۲}=۱^{۲}, a_{۱۳}=۱^{۲}, a_{۱۴}=۱^{۲}, a_{۲۳}=۲^{۲}, a_{۲۴}=۲^{۲}, a_{۳۴}=۳^{۲}$$

در جایی که شمارهٔ سطر از شمارهٔ ستون بزرگ‌تر است، شمارهٔ سطر و ستون را با هم جمع می‌کنیم و در ماتریس قرار می‌دهیم. پس:

$$a_{۲۱}=۲+۱=۳, a_{۳۱}=۳+۱=۴, a_{۳۲}=۳+۲=۵$$

بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

شناخت ماتریس‌های خاص یکی از اولین مراحلِ ورود به بازی ماتریس است.

ماتریس‌های خاص

۱ **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.

$$\bar{O}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲ **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر دارد. مرتبهٔ این ماتریس، $1\times n$ است.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \end{bmatrix}_{1\times 5}$$

۳ **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون دارد. مرتبهٔ این ماتریس، $n\times 1$ است.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

۴ **ماتریس مربعی:** ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند. مرتبهٔ این ماتریس $n\times n$ است.
این ماتریس دارای قطر اصلی و قطر فرعی است.
در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی $i<j$، روی قطر اصلی $i=j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است.
(i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون درایهٔ a_{ij} است.)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

قطر فرعی　قطر اصلی

۵ **ماتریس پایین‌مثلثی:** ماتریسی است **مربعی** که همهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

۶ **ماتریس بالامثلثی:** ماتریسی است **مربعی** که همهٔ درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

۷ **ماتریس قطری:** ماتریسی است **مربعی** که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند.
(ماتریس قطری هم بالامثلثی است و هم پایین‌مثلثی)

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

۸ **ماتریس اسکالر:** ماتریسی است **قطری** که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

۹ **ماتریس همانی (واحد):** ماتریسی است **اسکالر** که درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشند.

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید! گاهی ماتریس همانی را این‌گونه معرفی می‌کنند: $I_n=[a_{ij}]_{n\times n}$ که $a_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$.

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلاً اگر بگویند ماتریس $A=\begin{bmatrix} m+1 & n-1 \\ 2m & m+n-1 \end{bmatrix}$، **قطری** است؛ سریع نتیجه می‌گیریم درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی باید صفر باشند، یعنی

$$\begin{cases} n-1=0 \Rightarrow n=1 \\ 2m=0 \Rightarrow m=0 \end{cases}$$

باید $n=1$ و $m=0$ باشد.

بنابراین ماتریس A به شکل $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ است.

حالا اگر گفته شده بود مجموع درایه‌های یک ماتریس **اسکالر** از مرتبهٔ ۳ برابر ۶- است؛ می‌گفتیم ماتریس اسکالر 3×3 به شکل $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
و مجموع درایه‌های آن برابر با $3k$ است، نتیجه می‌گرفتیم $3k=-6$ و $k=-2$ و ماتریس به صورت $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ بوده است.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس A و B مساوی‌اند هرگاه: ۱ دو ماتریس، هم‌مرتبه باشند و ۲ درایه‌های نظیربه‌نظیر در A و B برابر باشند.

مثلاً دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x & -1 \\ 2 & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$ زمانی با هم برابرند که $x=1$، $y=5$ و $z=3$ باشد.

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$، در این صورت حاصل $x+y+z$ کدام است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ مرتبهٔ دو ماتریس یکی است، بنابراین برای این‌که دو ماتریس برابر باشند باید درایه‌های دو ماتریس نظیربه‌نظیر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \\ z=-۲ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴x=۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=۱$$

پس: $x+y+z=۲+۱-۲=۱$

آشنایی با جمع، تفریق و ضرب ماتریس‌ها از مهم‌ترین موضوعات مربوط به ماتریس‌ها است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

۱- جمع و تفریق

اگر دو ماتریس **هم‌مرتبه** باشند، با جمع یا تفریق کردن **درایه‌های نظیر دو ماتریس**، جمع یا تفریق دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۳ & ۲+۱ \\ ۰+۲ & ۱+(-۱) \\ ۲+۱ & ۴+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۰ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱-۳ & ۲-۱ \\ ۰-۲ & ۱-(-۱) \\ ۲-۱ & ۴-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

تست اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=\begin{cases} ۷ & i=j \\ i+j & i>j \\ i^۲ & i<j \end{cases}$، در ماتریس $I-A$ کدام درایه وجود <u>ندارد</u>؟

۱) مضرب ۳　　۲) مضرب ۴　　۳) مضرب ۵　　۴) مضرب ۷

پاسخ **گزینهٔ ۴** اول باید تکلیف ماتریس A را روشن کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

قبلاً گفته بودیم که در درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس مربعی $i>j$ و در درایه‌های بالای قطر اصلی $i<j$ است.

I (ماتریس همانی) هم که آشناست!

$$I-A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۶ & -۱ & -۱ \\ -۳ & -۶ & -۴ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}$$

در بین درایه‌های $I-A$ عدد مضرب ۷ نداریم.

۲- ضرب عدد در ماتریس

اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow -۳A=\begin{bmatrix} -۳ & ۳ & -۹ \\ -۶ & ۰ & -۱۲ \end{bmatrix}$$

تک‌تک درایه‌های A را در -۳ ضرب کردیم و $-۳A$ به دست آمد.

دقت کنید! اگر ماتریس A را در (-۱) ضرب کنیم، ماتریس $(-A)$ به دست می‌آید. به ماتریس $(-A)$، قرینهٔ ماتریس A می‌گوییم.

چند ویژگی در مورد جمع، تفریق و ضرب عدد در ماتریس

اگر ماتریس‌های A، B و C هم‌مرتبه، و k و m اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه:

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۳) $A+\bar{O}=A$ (خاصیت عضو خنثی در جمع)

۴) $A+(-A)=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)

۵) $۰\times A=\bar{O}$

۶) $k(A\pm B)=kA\pm kB$

۷) $(k\pm m)A=kA\pm mA$

۸) $k(mA)=m(kA)=(km)A$

۹) $kA=\bar{O} \Rightarrow k=۰$ یا $A=\bar{O}$

۱۰) $\begin{cases} A=B \Rightarrow kA=kB \\ kA=kB \xrightarrow{k\neq۰} A=B \end{cases}$

۳- ضرب دو ماتریس

اگر $A_{m\times n}$، $B_{k\times l}$ باشد، $A\times B$ زمانی وجود دارد که $n=k$ باشد، یعنی ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. $A\times B$، ماتریسی است از مرتبهٔ $m\times l$.

$$\underbrace{A_{m\times n}\times B_{k\times l}}_{n=k} \quad ; \quad A_{۳\times۲}\times B_{۲\times۴}=C_{۳\times۴}$$

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول، سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی‌داریم و درایه‌های هر سطر در ستون، نظیربه‌نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می‌شود و در ماتریس حاصل‌ضرب جایگزین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \text{سطر اول ستون اول} & \text{سطر اول ستون دوم} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} ۲-۱+۰ & ۴+۱+۰ \\ ۱+۳+۸ & ۲-۳+۲ \end{bmatrix}} \\ \text{سطر دوم ستون اول} & \text{سطر دوم ستون دوم} \end{array} = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

چگونگی به دست آوردن درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس حاصل‌ضرب را ببینید:

باید $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \boxed{۴} \end{bmatrix}$ را به دست آوریم. برای این کار، هر درایه در درایهٔ نظیرش ضرب می‌شود، حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم و به جای درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس حاصل‌ضرب قرار می‌دهیم.

$$۲\times ۱ + (-۱)\times ۱ + \boxed{۰}\times\boxed{۴} = ۲-۱+۰ = ۱$$

تست اگر $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+e$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ گزینهٔ ۱ ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ که ۳×۱ است در ماتریس $A_{m\times n}$ باید ضرب شود تا یک ماتریس ۳×۳ به ما بدهد.

$$B_{۳\times ۱}\times A_{m\times n} = C_{۳\times ۳}$$

برای این‌که دو ماتریس B و A ضرب‌پذیر باشند باید $m=۱$ باشد و برای این‌که ضرب B در A ماتریس ۳×۳ شود باید $n=۳$ باشد؛ یعنی ماتریس A از مرتبهٔ ۱×۳ است. با فرض A به شکل $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۲y & ۲z \\ x & y & z \\ ۳x & ۳y & ۳z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

واضح است که $a=۲x$ ،$b=۲y$ و $e=۳y$ ، بنابراین:

$$a+b+e = ۲x+۲y+۳y = ۲x+۵y = ۲(۳)+۵(۱) = ۱۱$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشند، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A\times B$ را به دست آورید.

(کار در کلاس کتاب درسی)

پاسخ *خب! انگار راهی نداریم* و باید ماتریس A که ۳×۲ است را در ماتریس B که یک ماتریس ۲×۳ است، ضرب کنیم ماتریس $A\times B$ یک ماتریس ۳×۳ خواهد شد.

$$A\times B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۴ \\ ۷ & -۲ & ۷ \\ ۰ & -۳ & -۷ \end{bmatrix}$$

درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم $A\times B$ برابر ۷ است.

به جای این‌که دو ماتریس را در هم ضرب کنیم تا درایهٔ مورد نظرمان را به دست آوریم، می‌توانستیم سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم تا درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم $A\times B$ به راحتی به دست آید.

$$\text{درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم } AB = [A \text{ سطر دوم}]\times[B \text{ ستون سوم}] = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۲+۵ = ۷$$

دقت کنید! اگر $A\times B = C$ باشد، آن‌گاه درایهٔ c_{ij} از ضرب سطر iاُم ماتریس A در ستون jاُم ماتریس B به دست می‌آید.

$$c_{ij} = [A \text{ سطر } i\text{اُم}]\times[B \text{ ستون } j\text{اُم}]$$

تست اگر برای دو ماتریس A و B روابط $۳A+۲B=I$ و $B-A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}$ برقرار باشند، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول BA کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۷

پاسخ گزینهٔ۲ $B-A$ مربعی و ۲×۲ است، پس A و B نیز مربعی و ۲×۲ هستند.

به کمک داده‌های سؤال می‌توانیم ماتریس‌های A و B را به دست آوریم. ببینید

$$\begin{cases} ۳A+۲B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\\ ۲B-۲A=\begin{bmatrix}-۴ & ۰\\ ۱۰ & ۶\end{bmatrix}\end{cases} \xrightarrow{-} ۵A=\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ -۱۰ & -۵\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}$$

حالا که A را داریم، B به راحتی به دست می‌آید.

$$B-A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۵ & ۳\end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$BA=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}$$

می‌توانستیم بگوییم درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول BA از ضرب سطر دوم B در ستون اول A به دست می‌آید.

$$\text{درایهٔ سطر دوم و ستون اول } BA=\begin{bmatrix}۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ -۲\end{bmatrix}=۳-۴=-۱$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشند، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس $(A\times B)\times C$ را به دست آورید.

(برگرفته از کار در کلاس کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد؛ یعنی $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ است. می‌توانیم اول ضرب دو ماتریس B و C که هر دو مربعی هستند را محاسبه کنیم و سپس A را در حاصل‌ضرب B و C ضرب کنیم.

$$B\times C=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}$$

$$A\times(B\times C)=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۲۰\\ -۳ & -۲\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}$$

درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس $(A\times B)\times C$ برابر با -۵ است.

به جای این کار می‌توانستیم سطر سوم A را در ماتریس B و ستون دوم C ضرب کنیم تا درایهٔ مورد نظرمان به دست آید.

$$\text{درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم } (A\times B)\times C=[\text{سطر سوم } A]\times[\text{ماتریس } B]\times[\text{ستون دوم } C]=\underbrace{\begin{bmatrix}۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}۳\\ ۱\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}۰ & -۵\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}۳\\ ۱\end{bmatrix}=-۵$$

دقت کنید! اگر $(A\times B)\times C=D$ باشد، آن‌گاه درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس D از رابطهٔ $d_{ij}=[\text{سطر } i\text{اُم } A]\times[\text{ماتریس } B]\times[\text{ستون } j\text{اُم } C]$ به دست می‌آید.

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۸ & ۰\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ -۲ & -۴\end{bmatrix}$$

دیدید؟! $A\times B$ و $B\times A$ برابر نشدند؛ **در حالت کلی $A\times B$ و $B\times A$ برابر نیستند.**

دقت کنید! در حالت‌های خاصی دو ماتریس می‌توانند خاصیت **تعویض‌پذیری** $(A\times B=B\times A)$ داشته باشند. چند حالت مهم را در زیر می‌بینید.

الف) ضرب ماتریس **همانی** (I_n) در ماتریس مربعی $A_{n\times n}$، خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری) دارد. $AI=IA=A$

ب) ضرب دو ماتریس **قطریِ** هم‌مرتبه، خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری) دارد. مثلاً اگر $A=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&b&۰\\۰&۰&c\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}m&۰&۰\\۰&n&۰\\۰&۰&p\end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه:

$$A\times B=B\times A=\begin{bmatrix}am&۰&۰\\۰&bn&۰\\۰&۰&cp\end{bmatrix}$$

پ) ضرب ماتریس **اسکالر** با هر ماتریس مربعیِ هم‌مرتبه با آن، خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}k&۰&۰\\۰&k&۰\\۰&۰&k\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}k&۰&۰\\۰&k&۰\\۰&۰&k\end{bmatrix}}_{A}=\begin{bmatrix}ka&kb&kc\\kd&ke&kf\\kg&kh&ki\end{bmatrix}$$

ت) دو ماتریس به شکل $\begin{bmatrix}m&n\\n&m\end{bmatrix}$، تعویض‌پذیرند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-۱&۲\\۲&-۱\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}۳&۱\\۱&۳\end{bmatrix}}_{B}=\begin{bmatrix}-۱&۵\\۵&-۱\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۳&۱\\۱&۳\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}-۱&۲\\۲&-۱\end{bmatrix}}_{A}=\begin{bmatrix}-۱&۵\\۵&-۱\end{bmatrix}$$

دیدید که $A\times B$ و $B\times A$ برابر شدند، بنابراین دو ماتریس A و B تعویض‌پذیرند.

ث) ضرب دو ماتریس به شکل $\begin{bmatrix}m&n\\-n&m\end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۴&۱\\-۱&۴\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۳&-۲\end{bmatrix}}_{A}=\begin{bmatrix}-۵&-۱۴\\۱۴&-۵\end{bmatrix}\qquad\underbrace{\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۳&-۲\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}۴&۱\\-۱&۴\end{bmatrix}}_{B}=\begin{bmatrix}-۵&-۱۴\\۱۴&-۵\end{bmatrix}$$

از آن‌جایی که $A\times B=B\times A$ شد، نتیجه می‌گیریم ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیرند.

۲) اگر $AB=AC$ باشد، **نمی‌توان** نتیجه گرفت $B=C$ است (حذف برقرار نیست). $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&۲\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۱&۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-۳&۰\\۳&۰\end{bmatrix}$ باشد.

$AB=AC=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$ است. آیا ماتریس‌های B و C برابرند؟! معلوم است که جواب «نه» است. این یعنی ممکن است $AB=AC$ باشد اما B و C برابر نباشند.

۳) ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

تست جواب‌های معادلهٔ $[x\ \ ۱]\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۱\end{bmatrix}=\bar{O}$ کدام‌اند؟

۱) -۳ و -۱ ۲) -۳ و ۱ ۳) ۳ و -۱ ۴) ۳ و ۱

پاسخ گزینهٔ ۳ از قبل آگاهی داریم که ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، یعنی: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

پس ابتدا حاصل $\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۱\end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\۲x+۳\end{bmatrix}$$

حالا باید $[x\ \ ۱]\begin{bmatrix}-x\\۲x+۳\end{bmatrix}$ برابر با $\bar{O}$ باشد، بنابراین:

$$[x\ \ ۱]_{۱\times۲}\begin{bmatrix}-x\\۲x+۳\end{bmatrix}_{۲\times۱}=[-x^۲+۲x+۳]_{۱\times۱}=[۰]$$

یعنی باید $-x^۲+۲x+۳=۰$ باشد، پس:

$$x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=-۱\end{cases}$$

معادلهٔ ماتریسی داده‌شده دارای دو جواب ۳ و -۱ است.

۴ در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است.

$$\begin{cases} A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C & \text{(توزیع‌پذیری از چپ)} \\ (B\pm C)\times A=B\times A\pm C\times A & \text{(توزیع‌پذیری از راست)} \end{cases}$$

۵ اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است. به عبارت دیگر ممکن است از ضرب‌کردن دو ماتریس غیرصفر یک ماتریس صفر به دست آید. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&1\end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر شده اما هیچ‌کدام از ماتریس‌ها، ماتریس صفر نبوده‌اند.

۶ حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و برای محاسبهٔ آن باید درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس را نظیربه‌نظیر در هم ضرب کرد.

$$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d&0&0\\0&e&0\\0&0&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ad&0&0\\0&be&0\\0&0&cf\end{bmatrix}$$

۷ ضرب ماتریس قطری در یک ماتریس مربعیِ هم‌مرتبه:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}m&0&0\\0&n&0\\0&0&p\end{bmatrix}}_{\text{قطری}}\underbrace{\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}}_{A}=\begin{bmatrix}ma&mb&mc\\nd&ne&nf\\pg&ph&pi\end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید! اگر ماتریس قطری از چپ در ماتریس A ضرب شود، سطر اول A در m، سطر دوم A در n و سطر سوم A در p ضرب می‌شود.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}m&0&0\\0&n&0\\0&0&p\end{bmatrix}}_{\text{قطری}}=\begin{bmatrix}ma&nb&pc\\md&ne&pf\\mg&nh&pi\end{bmatrix}$$

اگر ماتریس قطری از راست در ماتریس A ضرب شود، ستون اول A در m، ستون دوم A در n و ستون سوم A در p ضرب می‌شود.

۸ اگر دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند یعنی $A\times B=B\times A$ باشد، اتحادها در مورد آن‌ها برقرارند. اتحادهای مهم را ببینید:

۱) $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$ ‏ ۲) $(A-B)^2=A^2+B^2-2AB$ ‏ ۳) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

۴) $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ ‏ ۵) $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

دقت‌کنید! اتحادهای بالا در مورد $A_{n\times n}$ و I_n برقرارند. (چون I و A تعویض‌پذیر هستند؛ یعنی $IA=AI=A$)

تست اگر $A=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&0&1\\4&-1&2\end{bmatrix}$، ضرب ماتریس A با چه تعداد از ماتریس‌های زیر، خاصیت جابه‌جایی دارد؟

الف) $I-A$ ‏ ب) $(A+I)^2$ ‏ پ) A^2+2A-I ‏ ت) A^3

۱) ۴ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۱

پاسخ گزینهٔ ۱ می‌دانیم A و I تعویض‌پذیرند (یعنی $AI=IA$)، پس ضرب هر ماتریس که فقط شامل ماتریس‌هایی از A و I باشد، با ماتریس A خاصیت جابه‌جایی دارد.

بدون این‌که ضربی انجام دهیم، خیلی شیک می‌گوییم ضرب A با هر چهار ماتریس $I-A$، $(A+I)^2$، A^2+2A-I و A^3 خاصیت جابه‌جایی دارد.

تست اگر $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ دو ماتریس 3×3 با این ویژگی باشند که $a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=2k\\ 0 & i+j=2k+1\end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases}1 & i\le j\\ 0 & i>j\end{cases}$، آن‌گاه سطر اول ماتریس $(A-B)^2$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\begin{bmatrix}0&-1&0\end{bmatrix}$ ‏ ۲) $\begin{bmatrix}0&-1&1\end{bmatrix}$ ‏ ۳) $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$ ‏ ۴) $\begin{bmatrix}0&0&-1\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ ۳ اول باید تکلیف درایه‌های دو ماتریس A و B را مشخص کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

دقت‌کنید! در ماتریس A هر جا مجموع شمارهٔ سطر و ستون یک درایه، عددی فرد بود به جای آن صفر و هر جا مجموع شمارهٔ سطر و ستون درایه، عددی زوج بود به جای آن یک گذاشتیم.

حالا نوبت $A-B$ است که خودش را به شما نشان دهد!

$$A-B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

برای این‌که سطر اول $(A-B)^2$ را به دست بیاوریم کافی است سطر اول $A-B$ را در هر سه ستون $A-B$ ضرب کنیم.

$$(A-B)^2 \text{ سطر اول }=\begin{bmatrix}0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

تست اگر $A^2=\begin{bmatrix}-2&-5\\15&13\end{bmatrix}$ ، $B^2=\begin{bmatrix}7&4\\12&7\end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix}3&0\\6&6\end{bmatrix}$ باشند، $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-4&1\\-27&-16\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-6&1\\-27&-16\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-4&-1\\-27&-16\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-6&-1\\-27&-16\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ ۳ A^2 ، B^2 و $A-B$ ما را یاد اتحاد می‌اندازد؛ اما یادتان باشد اگر A و B تعویض‌پذیر نباشند، اتحاد بی‌اتحاد! یعنی:

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix}3&0\\6&6\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-2&-5\\15&13\end{bmatrix}-AB-BA+\begin{bmatrix}7&4\\12&7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}9&0\\54&36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-1\\27&20\end{bmatrix}-(AB+BA)$$

پس:

$$AB+BA=\begin{bmatrix}5&-1\\27&20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9&0\\54&36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-1\\-27&-16\end{bmatrix}$$

توان ماتریس‌ها

اگر ماتریس A مربعی باشد، داریم:

$$A^1=A$$
$$A^2=A.A$$
$$A^3=A.A^2=A^2.A$$
$$\vdots$$
$$A^n=A.A^{n-1}=A^{n-1}.A$$

دقت کنید! اگر A، ماتریسی **مربعی**، m و n طبیعی و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

۱) $I^n=I$ ۲) $(kA)^n=k^nA^n$

۳) $A^m\times A^n=A^{m+n}$ ۴) $(A^m)^n=A^{mn}$

برای محاسبهٔ توان‌های ماتریس مربعی A (به طور خاص در مورد توان‌های بزرگ!)، راه کلی این است که بین A، A^2، A^3 و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ باشد، A^7 و A^{14} را به دست آورید. *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

حالا که $A^2=I$ شده، خیلی راحت A^7 و A^{14} را به دست می‌آوریم.

$$A^7=(A^2)^3\times A=I^3\times A=IA=A$$
$$A^{14}=(A^2)^7=I^7=I$$

اگر $A^2=I$ باشد به ماتریس A، ماتریس متناوب گویند؛ زیرا توان‌های زوج این ماتریس برابر I و توان‌های فرد آن برابر با خودِ ماتریس است.

تست اگر $A=\begin{bmatrix}3&-7\\1&-2\end{bmatrix}$ باشد، A^{2021} کدام است؟

۱) $-I$ ۲) $\begin{bmatrix}-3&7\\-1&2\end{bmatrix}$ ۳) I ۴) $\begin{bmatrix}-2&7\\-1&3\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ ۴ برای رسیدن به $A^{۲۰۲۱}$ راهی به‌جز پیداکردن $A^{۲}$ نداریم.

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$A^{۲}$ که کمکی به ما نکرد! مجبوریم $A^{۳}$ را نیز به دست آوریم.

$$A^{۳} = \begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

حالا شرایط بهتر شد.

$$A^{۲۰۲۱} = (A^{۳})^{۶۷۳} \times A^{۲} = (-I)^{۶۷۳} \times A^{۲} = -A^{۲} = \begin{bmatrix} -۲ & ۷ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، **مجموع درایه‌های سطر سوم $A^{۴}B^{۳}$ کدام است؟**

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۱۶

پاسخ گزینهٔ ۲ یادتان باشد! اگر $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ باشد (A مثلثی باشد) و A^{n} را بخواهیم $(n \in \mathbb{N})$، درایه‌های روی قطر اصلی به توان n می‌رسند و صفرها سر جایشان می‌مانند اما در مورد بقیهٔ درایه‌ها چیزی نمی‌دانیم. بنابراین:

$$A^{۴} = \begin{bmatrix} ۱^{۴} & a & b \\ ۰ & ۳^{۴} & c \\ ۰ & ۰ & (-۱)^{۴} \end{bmatrix} \quad , \quad B^{۳} = \begin{bmatrix} ۱^{۳} & x & y \\ ۰ & ۱^{۳} & z \\ ۰ & ۰ & ۲^{۳} \end{bmatrix}$$

$$A^{۴}B^{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & a & b \\ ۰ & ۸۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & z \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

از ما مجموع درایه‌های سطر سوم $A^{۴}B^{۳}$ خواسته شده، پس کافی است سطر سوم $A^{۴}$ را در $B^{۳}$ ضرب کنیم تا سطر سوم $A^{۴}B^{۳}$ مشخص شود.

$$A^{۴}B^{۳} \text{ سطر سوم} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & z \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم $A^{۴}B^{۳}$ برابر ۸ است.

تست اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه **$A^{۱۳۹۹}$ کدام است؟**

۱) $۳^{۱۳۹۹}A$ ۲) $۳^{۱۳۹۸}A$ ۳) $۳^{۱۳۹۹}I$ ۴) $۱۳۹۹A$

پاسخ گزینهٔ ۲ **روش اول** $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم ببینیم تکلیفمان مشخص می‌شود یا نه!

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۹ \\ \frac{۳}{۲} & ۳ & \frac{۹}{۲} \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

اگر از تمام درایه‌های ماتریس $A^{۲}$ عدد ۳ را فاکتور بگیریم، داریم:

$$A^{۲} = ۳\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix} = ۳A$$

باید به دنبال رابطه‌ای بین A، $A^{۲}$، $A^{۳}$ و ... باشیم.

$$A^{۲} = ۳A$$
$$A^{۳} = A^{۲}.A = (۳A).A = ۳A^{۲} = ۳(۳A) = ۳^{۲}A$$
$$A^{۴} = A^{۳}.A = (۳^{۲}A).A = ۳^{۲}A^{۲} = ۳^{۲}(۳A) = ۳^{۳}A, \ldots$$

خیلی ساده! می‌توان نتیجه گرفت:

$$A^{۱۳۹۹} = ۳^{۱۳۹۸}A$$

روش دوم اگر $A^{۲} = kA$ باشد، $A^{n} = k^{n-۱}A$ است. در این تست که $A^{۲} = ۳A$ شده، بنابراین:

$$A^{۱۳۹۹} = ۳^{۱۳۹۸}A$$

تست اگر A و B دو ماتریس مربعی و $AB = A$ و $BA = B$ باشد، حاصل $A + A^{۲} + \cdots + A^{۱۳۹۹}$ کدام است؟

۱) $۱۳۹۸A$ ۲) $۱۳۹۹A$ ۳) $۱۴۰۰I$ ۴) $۱۴۰۰A$

پاسخ گزینهٔ ۲ طرفین رابطهٔ $AB = A$ را از راست در A ضرب می‌کنیم و به جای BA، B قرار می‌دهیم.

$$AB = A \xrightarrow{\times A} (AB)A = A^{۲} \Rightarrow A\underbrace{(BA)}_{B} = A^{۲}$$

$$AB = A^{۲} \xrightarrow{AB=A} A = A^{۲}$$

اگر $A^{۲} = A$ باشد، آن‌گاه $A^n = A$ $(n \in \mathbb{N})$ است و در نتیجه داریم: $A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots + A^{۱۳۹۹} = A + A + A + \cdots + A = ۱۳۹۹A$

دقت کنید! با توجه به قسمت‌های بالا، می‌توان روش به دست آوردن توان ماتریس‌های خاص را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱) اگر ماتریس A قطری باشد، برای به دست آوردن A^n، کافی است درایه‌های روی قطری اصلی A را به توان n برسانیم. $(n \in \mathbb{N})$

$$A = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & ۰ \\ ۰ & b^n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$$

۲) اگر ماتریس A مربعی و $A^{۲} = A$ باشد، آن‌گاه تمام توان‌های طبیعی A با خود A برابرند. $A^{۲} = A \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} A^n = A$

حواسمان هست! ماتریس I به هر توان طبیعی برسد برابر با I می‌شود. $(I^n = I)$

۳) اگر ماتریس A مربعی و $A^{۲} = kA$ باشد، آن‌گاه: $A^{۲} = kA \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} A^n = k^{n-۱}A$

۴) اگر ماتریس A مربعی و $A^{۲} = I$ باشد، آن‌گاه اگر A به توان طبیعی برسد، داریم:

$$A^{۲} = I \Rightarrow \begin{cases} A^{\text{فرد}} = A \\ A^{\text{زوج}} = I \end{cases}$$

در برخورد با توان‌های ماتریس‌ها، اولین قدم، یافتن $A^{۲}$ است. اگر A قطری باشد یا $A^{۲}$ یکی از حالت‌های خاص بالا باشد، تکلیف ما روشن است. در غیر این صورت برای یافتن توان‌های بزرگ ماتریس A باید سعی کنیم بین A، $A^{۲}$، $A^{۳}$ و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

دختران و پسران عزیز، سلام!

قبل از حل تست‌ها به نکات زیر توجه کنید!

۱) درس‌نامهٔ هر بخش را دقیق و کامل مطالعه کنید و مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه را با دقت حل کنید.

۲) تست‌هایی که علامت دارند کمی سخت‌تر از بقیهٔ تست‌ها هستند.

۳) پس از تسلط کامل به تست‌های هر بخش سراغ تست‌های سری [z] بروید. (البته هیچ اجباری به زدن تست‌های سری [z] نیست.)

۴) در مواقع اورژانسی که برای زدن همهٔ تست‌ها وقت ندارید، تست‌های رنگی (به ویژه تست‌های کنکورهای سراسری و تمرین کتاب درسی) تسلط نسبتاً خوبی بر مطالب هر بخش برای شما ایجاد خواهند کرد.

۵) حتماً حتماً پاسخ تست‌ها را با دقت و وسواس بررسی کنید؛ حتی اگر گزینهٔ درست را به عنوان پاسخ انتخاب کرده باشید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $A = [a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i<j \\ [\frac{-i}{۳}] & i=j \\ i-j & i>j \end{cases}$ باشد، حاصل $a_{۲۱} + a_{۱۲} - a_{۲۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲- تعریف $a_{ij} = \begin{cases} i+۲ & i=j \\ i-j & i>j \\ ۲j-i & i<j \end{cases}$، نمایش کدام ماتریس ۳×۳ زیر است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$

۳- اگر $A=[a_{ij}]=[\alpha i+\beta j]_{۱\times ۳}$ و $B=[b_{ij}]=[۲\alpha j-۳\beta i]_{۳\times ۱}$ باشند، مجموع درایه‌های ستون دوم A و سطر سوم B کدام است؟

۱) $۳\alpha-۷\beta$ ۲) $۲\alpha-۹\beta$ ۳) $۷\alpha-\beta$ ۴) $۸\alpha-۷\beta$

۴- مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر ۳×۳، برابر با ۱ است. حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۲۷}$ ۴) ۲۷

۵- اگر $۳X+\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴&-۵\\۳&۱\end{bmatrix}+۴I$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس X و حاصل‌ضرب درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی X، چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۶- اگر $A=[i-j^۲]_{۳\times ۳}$ و $B=[۶-ij]_{۳\times ۳}$، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۵

۷- اگر $A=\begin{bmatrix}-۲&۱&۰\\۳&m&n-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۱&m\\۲&m-۲&n+۱\end{bmatrix}$، $C=A-۲B$، $c_{۱۱}=-c_{۲۲}+۱$ و $c_{۲۳}=-۳c_{۱۳}$ باشد، $n-m$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۸- اگر $A=\begin{bmatrix}m&۳&۴\\۴&n-۱&۸\\۶&۹&k+۱\end{bmatrix}$، $B=[i+ij]_{۳\times ۳}$ و $A=B$ باشد، آن‌گاه حاصل $m+n+k$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) ۶ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

۹- اگر $A=\begin{bmatrix}m+۱&۱&x\\n-۱&۲&m-p\\k+۲&۳&y\end{bmatrix}$، $B=[ij-i]_{۳\times ۳}$ و $A=B$ باشد، حاصل $x-y-k+p+n-m$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۷ ۳) -۹ ۴) -۱۱

۱۰- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}p+n&-۱۱\\m-۲&-۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۷&p-n\\۱&-۳\end{bmatrix}$ مساوی هستند. ماتریس $C=[c_{ij}]_{۳\times ۳}$ با تعریف $c_{ij}=\begin{cases}[\frac{m-j}{۲n}] & i<j\\ [\frac{i+p}{m+n}] & i=j\\ [\frac{i+j}{۳m-n}] & i>j\end{cases}$، چگونه ماتریسی است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس همانی ۳) ماتریس اسکالر ۴) ماتریس غیرقطری

۱۱- اگر $A=[i-j]_{۲\times ۲}$، $B=\begin{bmatrix}m&m\\۲+n&n\end{bmatrix}$ و $A-B$ ماتریسی اسکالر باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی $A-B$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۴

۱۲- اگر $B=[b_{ij}]_{۳\times ۳}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases}i+j & i\leq j\\ j-i & i>j\end{cases}$ و A یک ماتریس اسکالر با مجموع درایه‌های ۱۲ باشندکه در رابطهٔ $A+I=B+C$ صدق کنند، مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۵ ۳) -۹ ۴) -۱۲

۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۰&۲\\۳&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۰&۳\\-۱&۲&۱\end{bmatrix}$ باشد، کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس AB کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴- به ازای کدام مقدار x و y، ماتریس $\begin{bmatrix}x&-۱&۴\\۲&۳&۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲&-۲\\۱&۰\\y&۱\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $x=۱,y=-۷$ ۲) $x=۲,y=-۷$ ۳) $x=۲,y=-۵$ ۴) $x=۱,y=-۵$

۱۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۴&a\\b&-۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&۲\end{bmatrix}$ و $A\times B$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $B\times A$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۲۴ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۱&۲\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}x&۴\\۳&y\end{bmatrix}$ و ماتریس BA قطری باشد، ماتریس $\begin{bmatrix}-۳x&x-y-۱\\y^۲-x^۲+x+۳&-۴y\end{bmatrix}$ چگونه ماتریسی است؟

۱) ماتریس همانی ۲) ماتریس اسکالر ۳) ماتریس قطری ۴) ماتریس صفر

۱۷- دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}-i^۲-۱ & i=j\\ m & i<j\\ n & i>j\end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases}-i-۱ & i=j\\ m & i<j\\ n & i>j\end{cases}$ تعریف شده‌اند و m و n اعداد طبیعی یک‌رقمی هستند. اگر $B\times A$ ماتریسی قطری باشد، ماتریس $\begin{bmatrix}m-۳&[\frac{m}{n}]\\[\frac{-n}{m}]+۱&m-n\end{bmatrix}$ چگونه ماتریسی است؟

۱) غیرقطری ۲) همانی ۳) قطری ۴) اسکالر

۱۸- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۰&m\\n&۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}m&-۱\\-۱&n\end{bmatrix}$ در شرط $AB-BA=\bar{O}$ صدق کنند، حاصل $m^۲-n^۲$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) نامشخص

۱۹- اگر $[۲\ \ ۱]\times A=[۳\ \ ۵]$ و $[۳\ \ ۴]\times A=[-۱\ \ ۲]$ باشد، حاصل $[۸\ \ ۹]\times A$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) $[۱\ \ ۹]$ ۲) $[۱\ \ -۹]$ ۳) $[-۱\ \ ۹]$ ۴) $[-۱\ \ -۹]$

۲۰- چند ماتریس $A_{۲\times۲}$ وجود دارد که $A\times\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۸&۴\end{bmatrix}$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}i^۲-۱ & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases}i^۲+۱ & i=j\\ i+j & i>j\\ i-j+۲ & i<j\end{cases}$ باشند، $A\times B$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) $\begin{bmatrix}-۳&-۵&-۱\\۱۱&۱۶&۳\\۷&۷&۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۱&-۵&-۵\\۵&۱۸&۱۹\\۵&۱۱&۱۳\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳&۵&۱\\۱۱&۱۶&۳\\۷&۷&۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱&۵&۵\\۵&۱۸&۱۹\\۵&۱۱&۱۳\end{bmatrix}$

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۷&۲a&۰\\۸&۴&-۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲b&۰&۰\\۵&۴&۰\\۵&۶&۴c\end{bmatrix}$ و $۴a+۳b-۲c=۷$ باشد، مجموع عناصر روی قطر اصلی BA چه‌قدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲۳- اگر $A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}۳&-۱\\۵&۲\\۷&۱\end{bmatrix}$، $B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix}-۱&۲&۴\\۵&۲&۱\end{bmatrix}$ و $C=A\times B=[c_{ij}]$، آن‌گاه حاصل $c_{۲۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۲۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳&۴\\-۱&۲&-۱\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&-۱&۲\\۱&۰&۳\\۳&۳&۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۴&-۱&۵\\۱&۱&-۱\\۲&۲&۰\end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر اول و ستون سوم ماتریس ABC کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۲۵- اگر $A=\begin{bmatrix}-۱&۱\\۳&-۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&۲\\\alpha&\beta\end{bmatrix}$ و ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۱

۲۶- اگر ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix}۲&۳\\۳&۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\sin\alpha&x^۴\\۸x&\cos\alpha\end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد $(x\neq۰)$، حاصل $x+\tan\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۲۷- حاصل $\sin۷۵^\circ\begin{bmatrix}\cos۱۵^\circ&\cos۷۵^\circ\\\cos۱۰۵^\circ&\cos۱۵^\circ\end{bmatrix}+\cos۷۵^\circ\begin{bmatrix}\sin۱۵^\circ&-\sin۱۰۵^\circ\\\cos۱۵^\circ&\cos۷۵^\circ\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) I ۲) $\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۱\end{bmatrix}$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $\begin{bmatrix}۰&۰\\۱&۱\end{bmatrix}$

۲۸- از رابطهٔ ماتریسی $[x\ \ 2x\ \ -1]\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$، عدد غیرصفر x کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۸)*

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۲۹- حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $[1\ \ -1\ \ 2]\begin{bmatrix}x&1&-1\\-1&2&2\\0&x&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\x\\1\end{bmatrix}=0$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 1 ۳) -1 ۴) $-\frac{3}{2}$

۳۰- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $[-1\ \ 2\ \ 1]\begin{bmatrix}x&2&1\\1&-x&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix}=0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۳۱- اگر α و β، ریشه‌های معادلهٔ $[-1\ \ 2]\begin{bmatrix}x&2\\1&-x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\5\end{bmatrix}=0$ باشند، حاصل $\alpha^2+\beta^2$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) ۸۴ ۲) ۵۴ ۳) ۴۴ ۴) معادله جواب ندارد.

۳۲- مجموع معکوس ریشه‌های معادلهٔ $[3\ \ 3\ \ -2x]\begin{bmatrix}2&3&1\\-1&x&0\\-2&1&x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\-1\end{bmatrix}=0$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) -2

۳۳- اگر B و A هر دو ۲×۲ باشند و $BA=\begin{bmatrix}0&-1\\2&3\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $B\begin{bmatrix}-2&1\\3&0\end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix}-1&-1\\-3&-3\end{bmatrix}A$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -6 ۴) -12

۳۴- اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1\\m&1\end{bmatrix}$ و $A^2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\-6&a_{22}\end{bmatrix}$، m کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

۳۵- اگر $A=\begin{bmatrix}2&a\\1&b\end{bmatrix}$ و $A^2=\begin{bmatrix}3&-5\\5&8\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $[-(b+1)\ \ -a]\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 5 ۴) 7

۳۶- اگر $A=\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I$، دوتایی (α,β) کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۴)*

۱) $(2,11)$ ۲) $(2,13)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,3)$

۳۷- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 2 & i\neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A^2-4A کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۶)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۳۸- اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7-A^4 کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۳)*

۱) $\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1&-1\\3&-3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1&1\\3&-3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&2\\-2&-3\end{bmatrix}$

۳۹- اگر $A=\begin{bmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{bmatrix}$، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

۱) $3x$ ۲) $3y$ ۳) $2(x^2+y^2)$ ۴) $3(x^2+y^2)$

۴۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ & -۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۳$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix} ۶۴ & ۶ & ۳۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۷۸ & ۶ & ۳۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۸۶ & ۸ & ۲۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۸۶ & ۶ & ۳۰ \end{bmatrix}$

۴۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۳ & ۳ \\ ۴ & -۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۴$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A+I)^۶=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۳۶

۴۳- در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، حاصل‌جمع درایه‌های ماتریس $A+A^۲+A^۳+A^۴$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۴۴- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $B^۲A$ کدام است؟

۱) -۹ ۲) -۵ ۳) -۱ ۴) ۹

۴۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ -۵ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشند، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس $A^۲B$ کدام است؟

۱) -۵۰ ۲) -۴۳ ۳) ۱۸ ۴) ۶۸

۴۶- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، در ماتریس $A^۶$ مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۲۷

۴۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌جمع درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۶$ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۷ ۳) $(۲\times ۳^۵)+۱$ ۴) $(۲\times ۳^۶)+۱$

۴۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۳ & ۳ \\ ۴ & -۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^۴$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) بالامثلثی ۲) پایین‌مثلثی ۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

۴۹- اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های $A^۵$ کدام است؟

۱) $-۳^۷$ ۲) $۳^۷$ ۳) $-۳^۶$ ۴) $۳^۶$

۵۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}+A^{۱۳}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۵۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A^{۱۲}=(kA)^۴$، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۶۴

۵۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۱۴۰۰}-A^{۱۴۰۱}$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۵۳- اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ m & 1\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس $A^{2n}-A^{2n-1}$ برابر ۷ باشد، m کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) 10 ۲) 3 ۳) -4 ۴) -5

۵۴- اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ باشد، A^{2021} کدام است؟

۱) $2^{2020}I$ ۲) $2^{1010}A$ ۳) $2^{2020}A$ ۴) $2^{1010}I$

۵۵- اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases}j-i & j=1\\ 1 & j=2\end{cases}$ باشد، A^{1400} کدام است؟

۱) A^2 ۲) A ۳) I ۴) $-A^2$

۵۶- اگر $\begin{bmatrix}12 & 1\\ -24 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}^{12}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+c-d$ کدام است؟

۱) 6 ۲) 7 ۳) 9 ۴) 12

۵۷- اگر A یک ماتریس قطری باشد و داشته باشیم $2I-3A=\begin{bmatrix}a^2-2b & a+2b\\ (b-1)^2-2a & a-b-3\end{bmatrix}$، ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A^{1401} کدام است؟

۱) -1 ۲) 2^{-1401} ۳) 1 ۴) 2^{1401}

۵۸- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{5} & 0 & 0\end{bmatrix}$، $B=I-A$ و $C=A+I$ باشد، ماتریس B^2+C^2 کدام است؟

۱) $-4A$ ۲) $-4I$ ۳) $4I$ ۴) $4A$

۵۹- اگر $A^2=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}$، $B^2=\begin{bmatrix}10 & -2\\ -3 & 7\end{bmatrix}$، $BA=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 6 & 10\end{bmatrix}$ و A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، حاصل $(2A-B)(A+3B)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}64 & 46\\ 69 & 73\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}12 & 42\\ 63 & 135\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}4 & 34\\ 51 & 115\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}4 & 46\\ 69 & 73\end{bmatrix}$

۶۰- برای دو ماتریس A و B داریم $A^2=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 3\end{bmatrix}$، $B^2=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 9 & 7\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

۶۱- سه ماتریس هم‌مرتبهٔ A، B و C دارای رابطهٔ $A=B+C$ می‌باشند، حاصل $A^2+B^2-AB-BA$ کدام است؟

۱) $-C^2$ ۲) $\bar{O}$ ۳) C ۴) C^2

۶۲- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -3 & -4\end{bmatrix}$ در رابطهٔ $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ صدق می‌کنند، حاصل $\begin{bmatrix}x & 2 & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -x\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) 1 ۳) 3 ۴) 5

۶۳- ماتریس‌های مربعی A و B در رابطهٔ $A-\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=B$ صدق می‌کنند، مجموع درایه‌های ماتریس $(A^2+AB+BA+B^2)^3$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۶۴- اگر A یک ماتریس مربعی و $A^2-I=2A$ باشد، A^5-A^4 کدام است؟

۱) $29A+12I$ ۲) $17A+7I$ ۳) $12A+5I$ ۴) A

۶۵- اگر $A^2+I=A$ باشد، A^{2021} کدام است؟

۱) $-A$ ۲) $A-I$ ۳) $-I$ ۴) $I-A$

۶۶- اگر $A^{2}=A$ و $A+B=I-A$ باشد، حاصل B^{1401} کدام است؟

۱) I
۲) A
۳) $1401I$
۴) B

۶۷- اگر A و B دو ماتریس متمایز باشند به طوری که $AB=A$ و $BA=B$، آن‌گاه B^{2} برابر با کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) I
۲) A
۳) B
۴) $-I$

۶۸- اگر $A-B=-kI$ باشد، حاصل $A^{2}-AB+kB$ کدام است؟

۱) k^{2}
۲) $k^{2}I$
۳) $-k^{2}$
۴) $-k^{2}I$

۶۹- اگر $AB=B$ و $BA=A$ باشد، $A^{2}B^{2}$ کدام است؟

۱) I
۲) A
۳) B
۴) A^{2}

۷۰- اگر $B^{2}=-B$ و $A+B=I$ باشد، $A^{2}B$ کدام است؟

۱) $-4B$
۲) $-2B$
۳) $2B$
۴) $4B$

۷۱- اگر $BA=B$ و $AB^{2}=A$ باشد، ماتریس B^{3} کدام است؟

۱) I
۲) A
۳) B
۴) AB

۷۲- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، $B^{2}=B+I$ و $B-A=I$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $AB=BA$
۲) $BA=I$
۳) $A^{2}B=A$
۴) $B^{2}A=I$

۷۳- اگر $BA=2A$ و $AB=B$ باشد، $2A^{7}-3A^{4}$ کدام است؟

۱) $-A$
۲) $\bar{O}$
۳) A
۴) $2A$

۷۴- A و B دو ماتریس مربعی و $AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ است، مجموع درایه‌های ماتریس $A(BA)^{4}B$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۷۵- اگر $AB-2BA=\bar{O}$ و $B^{3}A=kAB^{3}$ باشند، k کدام است؟

۱) ۸
۲) $\frac{1}{8}$
۳) $-\frac{1}{8}$
۴) -8

۷۶- اگر $A^{2}=-\frac{3}{2}A$ و $2A+3B=\bar{O}$ باشد، حاصل $A(A+B)(2A-B)(A-B)$ کدام است؟

۱) $5A$
۲) $-5A$
۳) $-5I$
۴) $5I$

آزمونک

۷۷- اگر درایه‌های سطر ۴ ماتریس A، $-1,2,5,0$ و درایه‌های ستون سوم ماتریس B، $1,-2,5,0$ باشند، درایهٔ سطر چهارم و ستون سوم ماتریس AB کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۱۰
۴) ۲۰

۷۸- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $[1\ \ -1\ \ 2]\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\ -x & 0 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -10\\ -x\end{bmatrix}=0$ کدام است؟

۱) -14
۲) -9
۳) -5
۴) -1

۷۹- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^{6} کدام است؟

۱) 3^{5}
۲) 3^{6}
۳) 3^{7}
۴) 3^{8}

۸۰- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $BA-3AB=\bar{O}$، مقدار m از رابطهٔ $mAB^{3}=B^{3}A$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{27}$
۲) -27
۳) $-\frac{1}{27}$
۴) ۲۷

۸۱- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری که $A^{2}=A$ و $A+B=I$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $AB=BA$
۲) $AB=I$
۳) $AB^{2}=I$
۴) $A=B^{2}$

سری [Z]

۸۲- حاصل $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -11 & 1\end{bmatrix}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۱) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}1 & 8\\ -6 & 1\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}1 & 8\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

۸۳- اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{1400}-A^{1399}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

۴) $\bar{O}$

۸۴- در ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ حاصل A^n-A^{n-1} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}2^{n-1}&0\\0&0\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}2^{n-1}&0\\0&1\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$

۸۵- اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\end{bmatrix}$ و $BA^n=\begin{bmatrix}4&41\\3&32\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه:

۱) $n=11$

۲) $n=10$

۳) $n=9$

۴) $n=8$

۸۶- اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^2-A=\bar{O}$ ، آن‌گاه $(2A-I)^{1399}$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$

۲) I

۳) A

۴) $2A-I$

۱- گزینهٔ ۴ ماتریس ۲×۲ در حالت کلی به شکل $\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ است.

سؤال از ما سه درایه از چهار درایهٔ ماتریس را خواسته! برای به دست آوردن هر درایه نیز رابطه‌ای را به ما داده! ما هم درایه‌هایی را که خواسته به دست می‌آوریم و تحویلش می‌دهیم.

در $a_{۱۲}$ (درایهٔ واقع در سطر اول و ستون دوم A)، $i=۱$ و $j=۲$ است. با توجه به این‌که $i<j$ است، درایهٔ $a_{۱۲}$ را از رابطهٔ $i+j$ به دست می‌آوریم.

بنابراین: $a_{۱۲}=۱+۲=۳$

در $a_{۲۱}$ (درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول A)، $i=۲$ و $j=۱$ است. از آن‌جایی که $i>j$ است، درایهٔ $a_{۲۱}$ از رابطهٔ $i-j$ به دست می‌آید. پس:

$a_{۲۱}=۲-۱=۱$

در $a_{۲۲}$ (درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون دوم A)، $i=۲$ و $j=۲$ است.

چون $i=j$ است، درایهٔ $a_{۲۲}$ را به کمک رابطهٔ $[\frac{-i}{۳}]$ مشخص می‌کنیم.

بنابراین: $a_{۲۲}=[\frac{-۲}{۳}]=-۱$

در نهایت باید حاصل $a_{۲۱}+a_{۱۲}-a_{۲۲}$ را به دست بیاوریم که برابر با $۱+۳+۱=۵$ است.

۲- گزینهٔ ۲ صورت کلی یک ماتریس ۳×۳ به شکل زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

۱ هر جا شمارهٔ سطر و ستون درایه برابر بودند کافی است شمارهٔ سطر را با ۲ جمع کنیم و به جای آن درایه بنویسیم. (درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ این‌طور هستند.)

۲ هر جا شمارهٔ سطر از شمارهٔ ستون بزرگ‌تر بود، شمارهٔ سطر را منهای شمارهٔ ستون می‌کنیم و به جای آن درایه می‌نویسیم. (درایه‌های $a_{۲۱}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$ این ویژگی را دارند.)

۳ هر جا شمارهٔ سطر از شمارهٔ ستون کوچک‌تر بود، دو برابر شمارهٔ ستون را منهای شمارهٔ سطر می‌کنیم و به جای آن درایه می‌نویسیم. ($a_{۱۲}$، $a_{۱۳}$ و $a_{۲۳}$ چنین خصوصیتی دارند.)

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۲ & ۲\times۲-۱ & ۲\times۳-۱ \\ ۲-۱ & ۲+۲ & ۲\times۳-۲ \\ ۳-۱ & ۳-۲ & ۳+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

۳- گزینهٔ ۱ به تعریف درایه‌های ماتریس A دقت کنید! می‌گوید برای به دست آوردن هر درایه از ماتریس A باید شمارهٔ سطر آن درایه را در α و شمارهٔ ستون آن را در β ضرب کنید و حاصل این دو ضرب را با هم جمع کنید.

حواسمان هست! که A یک ماتریس سطری است (یک سطر و سه ستون دارد)؛ بنابراین درایهٔ ستون دوم A یعنی درایهٔ واقع در سطر اول و ستون دوم A برابر است با:

$a_{۱۲}=(\alpha\times۱)+(\beta\times۲)=\alpha+۲\beta$

هر درایهٔ ماتریس B از ضرب شمارهٔ ستون آن درایه در ۲α منهای ضرب شمارهٔ سطر درایه در ۳β به دست می‌آید.

ماتریس B یک ماتریس ستونی است (سه سطر و یک ستون دارد)؛ بنابراین درایهٔ سطر سوم B یعنی درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون اول B برابر می‌شود با:

$b_{۳۱}=(۲\alpha\times۱)-(۳\beta\times۳)=۲\alpha-۹\beta$

سؤال از ما $a_{۱۲}+b_{۳۱}$ را خواسته که برابر است با:

$a_{۱۲}+b_{۳۱}=(\alpha+۲\beta)+(۲\alpha-۹\beta)=۳\alpha-۷\beta$

۴- گزینهٔ ۳ ماتریس اسکالر، ماتریسی است **قطری** که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

ماتریس اسکالر ۳×۳ به صورت $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix}$ است که مجموع درایه‌های آن $۳a$ است؛ بنابراین داریم:

$۳a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$

حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس برابر است با:

$a^{۳}=\frac{۱}{۲۷}$

۵- گزینهٔ ۱ $I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را می‌شناسیم.

دقت کنید! همهٔ ماتریس‌های داده‌شده ۲×۲ هستند؛ زیرا فقط ماتریس‌های هم‌مرتبه قابلیت جمع و تفریق دارند. با توجه به صورت سؤال، داریم:

$$۳X=\begin{bmatrix} -۴ & -۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۷ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} \frac{-۱}{۳} & \frac{-۷}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی} = \frac{-۱}{۹} \\ \text{حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی} = ۰ \end{cases}$$

اختلاف حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی و حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی X، برابر $\frac{۱}{۹}$ است.

۶- گزینهٔ ۱ نیازی نیست هر دو ماتریس را بنویسیم و با هم جمع کنیم! بلکه کافی است سطر دوم هر دو ماتریس را به دست آوریم و با هم جمع کنیم.

$a_{۲۱}=۲-۱^{۲}=۱, a_{۲۲}=۲-۲^{۲}=-۲, a_{۲۳}=۲-۳^{۲}=-۷,$

$b_{۲۱}=۶-(۲\times۱)=۴, b_{۲۲}=۶-(۲\times۲)=۲,$

$b_{۲۳}=۶-(۲\times۳)=۰$

بنابراین: $A+B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}$

مجموع درایه‌های سطر دوم $A+B$ برابر با $۵+۰-۷=-۲$ است.

۷- گزینهٔ ۳ $C=A-۲B$ می‌گوید هر درایهٔ A منهای دو برابر درایهٔ نظیرش در B، درایهٔ نظیر در C را می‌سازد. بنابراین:

$c_{۱۱}=a_{۱۱}-۲b_{۱۱}=-۲-۲(۱)=-۴$

$c_{۲۲}=a_{۲۲}-۲b_{۲۲}=m-۲(m-۲)=-m+۴$

با توجه به این‌که $c_{۱۱}=-c_{۲۲}+۱$ است، پس:

$-۴=-(-m+۴)+۱ \Rightarrow m=-۱$

حالا باید سراغ $c_{۲۳}=-۳c_{۱۳}$ برویم:

$c_{۲۳}=a_{۲۳}-۲b_{۲۳}=(n-۱)-۲(n+۱)=-n-۳$

$c_{۱۳}=a_{۱۳}-۲b_{۱۳}=۰-۲(m)=-۲m=-۲(-۱)=۲$

از تساوی $-n-۳=-۶$ نتیجه می‌شود $n=۳$.

خواستهٔ سؤال $n-m$ بود که برابر با $۴=(-۱)-۳$ است.

۸- گزینهٔ ۲ ابتدا طبق تعریف، درایه‌های ماتریس B را می‌نویسیم:

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \\ ۶ & ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

A و B با هم مساوی‌اند، پس درایه‌های آن‌ها باید نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$\begin{cases} m=۲ \\ n-۱=۶ \Rightarrow n=۷ \\ k+۱=۱۲ \Rightarrow k=۱۱ \end{cases}$$

بنابراین: $m+n+k=۲+۷+۱۱=۲۰$

۹- گزینهٔ ۱ باید B را با درایه‌هایش بنویسیم؛ آن هم به کمک تعریفی که داده!

$$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$A=B$ است، پس:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۳ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m+۱ & ۱ & x \\ n-۱ & ۲ & m-p \\ k+۲ & ۳ & y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+۱=۰ \Rightarrow m=-۱ \\ n-۱=۰ \Rightarrow n=۱ \\ k+۲=۰ \Rightarrow k=-۲ \end{cases} , \begin{cases} x=۲ \\ m-p=۴ \xrightarrow{m=-۱} p=-۵ \\ y=۶ \end{cases}$$

بنابراین: $x-y-k+p+n-m=۲-۶+۲-۵+۱+۱=-۵$

۱۰- گزینهٔ ۳ دو ماتریس A و B مساوی‌اند، پس باید درایه‌های نظیربه‌نظیر دو ماتریس برابر باشند.

$$\begin{cases} m-۲=۱ \Rightarrow m=۳ \\ \left.\begin{matrix} p+n=-۷ \\ p-n=-۱۱ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} \begin{cases} p=-۹ \\ n=۲ \end{cases} \end{cases}$$

حالا که تکلیف m، n و p روشن شد باید براساس تعریف داده‌شده، ماتریس C را بنویسیم. درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس C از رابطهٔ $[\frac{i+p}{m+n}]$، درایه‌های بالای قطر اصلی از رابطهٔ $[\frac{m-j}{۲n}]$ و درایه‌های پایین قطر اصلی از رابطهٔ $[\frac{i+j}{۳m-n}]$ به دست می‌آیند.

$$C=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} \\ c_{۳۱} & c_{۳۲} & c_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [\frac{۸}{۵}] & [\frac{۱}{۴}] & [\frac{۰}{۴}] \\ [\frac{۳}{۷}] & [\frac{-۷}{۵}] & [\frac{۰}{۴}] \\ [\frac{۴}{۷}] & [\frac{۵}{۷}] & [\frac{-۶}{۵}] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس C با هم برابرند و تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی C، صفرند؛ پس ماتریس C، اسکالر است.

۱۱- گزینهٔ ۳ اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ باشد، داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی، صفرند. بنابراین:

$$A-B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} m & m \\ ۲+n & n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -m & -۱-m \\ -n-۱ & -n \end{bmatrix}$$

$A-B$ اسکالر است، پس:

$$\begin{cases} -m=-n \Rightarrow m=n \\ -n-۱=-۱-m=۰ \Rightarrow n=m=-۱ \end{cases}$$

حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی $A-B$ برابر با $mn=۱$ است.

۱۲- گزینهٔ ۲ می‌دانیم زمانی ماتریس‌ها با هم جمع می‌شوند که هم‌مرتبه باشند. با توجه به این‌که B یک ماتریس ۳×۳ است، نتیجه می‌گیریم ماتریس‌های A، C و I نیز باید ۳×۳ باشند.

سؤال گفته ماتریس A یک ماتریس اسکالر است. می‌دانیم ماتریس اسکالر ۳×۳ به شکل $\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$ است. حالا که مجموع درایه‌های ماتریس اسکالر A برابر ۱۲ شده، پس $۳k=۱۲$ یعنی $k=۴$ است. بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ است.

$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ هم که معرف حضور شما هست!

رسیدیم به ماتریس B که باید براساس تعریف داده‌شده، درایه‌هایش را مشخص کنیم.

$$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

با جای‌گذاری ماتریس‌های A، B و I در رابطهٔ $A+I=B+C$، ماتریس C مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۶ \end{bmatrix}+C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۶ \end{bmatrix}+C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۶ \end{bmatrix}=C$$

بنابراین:

$$C=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & -۴ \\ ۱ & ۱ & -۵ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های C برابر با −۵ است.

۱۳- گزینهٔ ۱ باید A و B را ضرب کنیم تا کوچک‌ترین درایه مشخص شود!

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۲ \\ -۲ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس AB، −۲ است.

۱۴- گزینهٔ ۲ ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که درایه‌های طرفین قطر اصلی آن همگی صفرند؛ این شکلی $\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$.

دو ماتریس را در هم ضرب می‌کنیم و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم تا x و y به دست آیند.

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x-1+4y & -2x+0+4 \\ 4+3+y & -4+0+1 \end{bmatrix}$$

پس:
$$\begin{cases} -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \\ 4+3+y=0 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

۱۵- گزینهٔ ۴ همین اول کار باید تکلیف $A\times B$ را روشن کنیم!

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+3a & 2a-8 \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

برای این‌که $A\times B$ قطری باشد باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند، پس:
$$\begin{cases} b-3=0 \Rightarrow b=3 \\ 2a-8=0 \Rightarrow a=4 \end{cases}$$

حالا که A و B را داریم، $B\times A$ را می‌یابیم.

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $B\times A$ برابر است با:
$6+18=24$

مراقب‌باشید! اگر $A\times B$ قطری باشد، دلیلی وجود ندارد که $B\times A$ هم قطری باشد.

۱۶- گزینهٔ ۲ BA قطری است؛ یعنی باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشد.

$$BA=\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-4 & 8-2x \\ 3-y & 2y-6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-2x=0 \Rightarrow x=4 \\ 3-y=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

بنابراین:
$$\begin{bmatrix} -3x & x-y-1 \\ y^2-x^2+x+3 & -4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

چون درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفرند و درایه‌های روی قطر اصلی برابرند، واضح و مُبرهَن است که ماتریس بالا، اسکالر است.

۱۷- گزینهٔ ۱ با توجه به تعریفی که سؤال از ماتریس‌های A و B ارائه داده، می‌توانیم این دو ماتریس را با درایه‌هایش مشخص کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & m \\ n & -5 \\ n & n \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -2 & m & m \\ n & -3 & m \end{bmatrix}$$

حالا باید $B\times A$ را به دست آوریم.

$$B\times A=\begin{bmatrix} -2 & m & m \\ n & -3 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & m \\ n & -5 \\ n & n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+2mn & mn-7m \\ mn-5n & 2mn+15 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس $B\times A$ قطری است، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن باید صفر باشند.
$$\begin{cases} mn-7m=0 \\ mn-5n=0 \end{cases}$$

از $mn-7m=mn-5n$ درمی‌یابیم $7m=5n$ است و چون m و n طبیعی و یک‌رقمی‌اند، پس $n=7$ و $m=5$ است. با قرارداد مقادیر m و n در ماتریس $\begin{bmatrix} m-3 & [\frac{m}{n}] \\ [\frac{-n}{m}]+1 & m-n \end{bmatrix}$ به ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ می‌رسیم که یک ماتریس غیرقطری است.

۱۸- گزینهٔ ۲ A و B را داریم؛ AB و BA را پیدا می‌کنیم و در رابطهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم تا m و n مشخص شوند.

$$AB-BA=\bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین:
$$\begin{bmatrix} -m & mn \\ mn & -n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -n & m^2 \\ n^2 & -m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n-m & mn-m^2 \\ mn-n^2 & -(n-m) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n-m & m(n-m) \\ -n(n-m) & -(n-m) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (n-m)\begin{bmatrix} 1 & m \\ -n & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow n-m=0 \Rightarrow n=m \Rightarrow m^2-n^2=0$$

۱۹- گزینهٔ ۱ با توجه به معادلات داده‌شده، A یک ماتریس ۲×۲ است.

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=3 \\ 2b+d=5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+4c=-1 \\ 3b+4d=2 \end{cases} \quad (2)$$

دو برابر معادلات (۲) را با معادلات (۱) جمع می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} (2a+c)+2(3a+4c)=3+2(-1) \Rightarrow 8a+9c=1 \\ (2b+d)+2(3b+4d)=5+2(2) \Rightarrow 8b+9d=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 9 \end{bmatrix}$$

۲۰- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & a \\ 2c & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=4 \end{cases}$$

در ماتریس A باید $a=0$ و $c=4$ باشد و برای این‌که رابطهٔ داده‌شده برقرار باشد به مقدار b و d بستگی ندارد، یعنی به ازای هر عدد حقیقی b و d، $a=0$ و $c=4$ معادلهٔ ماتریسی داده‌شده برقرار است، پس بی‌شمار ماتریس A وجود دارد که در رابطهٔ داده‌شده، صدق کند.

۲۱- گزینهٔ ۳ اول باید A و B را مشخص کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1^2-1 & 2-1 \\ 2-1 & 2^2-1 \\ 3-1 & 3-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1^2+1 & 1-2+2 & 1-3+2 \\ 2+1 & 2^2+1 & 2-3+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:
$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۲- گزینهٔ «۱» هر چند که کتاب فراموش کرده!!! ماتریس مثلثی را معرفی کند؛ اما ما معرفی می‌کنیم!

ماتریسی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس پایین‌مثلثی و ماتریسی که درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر باشند را بالامثلثی گویند.

یادتان بماند که: ۱ ضرب دو ماتریس بالامثلثی، بالامثلثی و ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی، پایین‌مثلثی است.

۲ عناصر روی قطر اصلی حاصل‌ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی (یا بالامثلثی) برابر با حاصل‌ضرب نظیربه‌نظیر عناصر روی قطر اصلی دو ماتریس است؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ ۰ & b' & f' \\ ۰ & ۰ & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & ? & ? \\ ۰ & bb' & ? \\ ۰ & ۰ & cc' \end{bmatrix}$$

حالا که می‌دانیم ماتریس مثلثی چه شکلیه! سراغ حل سؤال می‌رویم.

سؤال از ما عناصر روی قطر اصلی ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی را خواسته!

$$BA=\begin{bmatrix} ۲b & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۴ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۴c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۷ & ۲a & ۰ \\ ۸ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶b & ۰ & ۰ \\ ? & ۸a & ۰ \\ ? & ? & -۴c \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است با:

$$۶b+۸a-۴c=۲(۳b+۴a-۲c)=۲\times ۷=۱۴$$

۲۳- گزینهٔ «۳» اگر $A\times B=C$ باشد، درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس C از ضرب سطر iاُم ماتریس A در ستون jاُم ماتریس B به دست می‌آید، بنابراین درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از ضرب سطر دوم A در ستون سوم B به دست می‌آید.

$$C_{۲۳}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}=(۵\times ۴)+(۲\times ۱)=۲۲$$

۲۴- گزینهٔ «۲» برای به دست آوردن سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس ABC، کافی است به ترتیب سطر iاُم ماتریس A، ماتریس B و ستون jاُم ماتریس C را در هم ضرب کنیم. بنابراین:

$$ABC_{\text{سطر اول و ستون سوم}}=\begin{bmatrix} A & \text{سطر اول} \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} \text{ستون سوم} \\ C \end{bmatrix}$$

$$ABC_{\text{سطر اول و ستون سوم}}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱۷ & ۱۰ & ۱۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=۸۵-۱۰=۷۵$$

۲۵- گزینهٔ «۱» ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی $AB=BA$ است.

$$AB=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha-۱ & \beta-۲ \\ ۳-\alpha & ۶-\beta \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۳\beta-\alpha & \alpha-\beta \end{bmatrix}$$

از برابری AB و BA داریم:

$$\begin{bmatrix} \alpha-۱ & \beta-۲ \\ ۳-\alpha & ۶-\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۳\beta-\alpha & \alpha-\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-۱=۵ \Rightarrow \alpha=۶ \\ \beta-۲=-۱ \Rightarrow \beta=۱ \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=۷$$

دقت کنید! که به ازای $\alpha=۶$ و $\beta=۱$، $۳-\alpha=۳\beta-\alpha$ و $۶-\beta=\alpha-\beta$ برقرار است.

۲۶- گزینهٔ «۳» اگر دو ماتریس A و B بخواهند تعویض‌پذیر باشند (خاصیت جابه‌جایی داشته باشند)، باید $AB=BA$ باشد.

اما راه ساده‌تری هم برای حل این تست وجود دارد.

ضرب دو ماتریس به فُرم $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی دارند.

در ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر و درایه‌های روی قطر فرعی نیز با هم برابرند؛ اگر در ماتریس $\begin{bmatrix} \sin\alpha & x^{۴} \\ ۸x & \cos\alpha \end{bmatrix}$ نیز درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر و درایه‌های روی قطر فرعی با هم برابر باشند، ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی دارد.

بنابراین: $\sin\alpha=\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha=۱$

$$x^{۴}=۸x \xrightarrow{x\neq ۰} x^{۳}=۸ \Rightarrow x=۲$$

پس: $x+\tan\alpha=۲+۱=۳$

۲۷- گزینهٔ «۱» بهتر نیست اول از شَرِّ زوایای مختلف خلاص شویم؟!

از مثلثات به یاد داریم:

$$\begin{cases} \sin ۷۵^\circ=\sin(۹۰^\circ-۱۵^\circ)=\cos ۱۵^\circ \\ \cos ۷۵^\circ=\cos(۹۰^\circ-۱۵^\circ)=\sin ۱۵^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin ۱۰۵^\circ=\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=\cos ۱۵^\circ \\ \cos ۱۰۵^\circ=\cos(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ \end{cases}$$

همهٔ زوایا را برحسب ۱۵° می‌نویسیم و حاصل را حساب می‌کنیم.

$$\cos ۱۵^\circ\begin{bmatrix} \cos ۱۵^\circ & \sin ۱۵^\circ \\ -\sin ۱۵^\circ & \cos ۱۵^\circ \end{bmatrix}+\sin ۱۵^\circ\begin{bmatrix} \sin ۱۵^\circ & -\cos ۱۵^\circ \\ \cos ۱۵^\circ & \sin ۱۵^\circ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos^{۲} ۱۵^\circ & \cos ۱۵^\circ \sin ۱۵^\circ \\ -\cos ۱۵^\circ \sin ۱۵^\circ & \cos^{۲} ۱۵^\circ \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \sin^{۲} ۱۵^\circ & -\cos ۱۵^\circ \sin ۱۵^\circ \\ \cos ۱۵^\circ \sin ۱۵^\circ & \sin^{۲} ۱۵^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

دقت کنید! $\sin^{۲} ۱۵^\circ+\cos^{۲} ۱۵^\circ=۱$.

۲۸- گزینهٔ «۱» ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x-۲x-۱ \\ ۴x+۰+۲ \\ x+۴x+۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-۱ \\ ۴x+۲ \\ ۵x \end{bmatrix}$$

حالا باید حاصل‌ضرب ماتریس $\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix}$ را در ماتریس بالا به دست آوریم و برابر صفر قرار دهیم تا x پیدا شود.

$$\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-۱ \\ ۴x+۲ \\ ۵x \end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow x(x-۱)+۲x(۴x+۲)-۱(۵x)=۰$$

$\Rightarrow x^{۲}-x+۸x^{۲}+۴x-۵x=۰ \Rightarrow ۹x^{۲}-۲x=۰$

$\Rightarrow x(۹x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\frac{۲}{۹} \end{cases}$

سؤال، عدد غیرصفر x را خواسته، پس جواب سؤال $x=\frac{۲}{۹}$ است.

۲۹- گزینهٔ ۱ اول حاصل‌ضرب دو ماتریس $[۱\ \ -۱\ \ ۲]$ و $\begin{bmatrix} x & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & x & ۱ \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$[۱\ \ -۱\ \ ۲]\begin{bmatrix} x & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & x & ۱ \end{bmatrix}=[x+۱\ \ ۲x-۱\ \ -۱]$$

حالا باید حاصل بالا را در $\begin{bmatrix} -۲ \\ x \\ ۱ \end{bmatrix}$ ضرب کنیم و برابر صفر قرار دهیم.

$$[x+۱\ \ ۲x-۱\ \ -۱]\begin{bmatrix} -۲ \\ x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow -۲x-۲+۲x^{۲}-x-۱=۰$$

پس جمع ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}-۳x-۳=۰$ برابر با $-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$ است.

تذکر جمع ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

۳۰- گزینهٔ ۲ حاصل‌ضرب دو ماتریس اول را به دست می‌آوریم و در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$[-۱\ \ ۲\ \ ۱]\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \\ ۱ & -x & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow [-x+۱\ \ -۲x-۱\ \ ۰]\begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=-x^{۲}+x-۴x-۲=۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۳x+۲=۰$$

α و β ریشه‌های معادلهٔ فوق هستند.

$(x+۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow \alpha=-۲, \beta=-۱$

بنابراین: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$

۳۱- گزینهٔ ۳ حاصل‌ضرب دو ماتریس اول را به دست می‌آوریم و در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$[-۱\ \ ۲]\begin{bmatrix} x & ۲ \\ ۱ & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۵ \end{bmatrix}=\left([-۱\ \ ۲]\begin{bmatrix} x & ۲ \\ ۱ & -x \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$=[-x+۲\ \ -۲-۲x]\begin{bmatrix} x \\ ۵ \end{bmatrix}=-x^{۲}+۲x-۱۰-۱۰x$$

$$=-x^{۲}-۸x-۱۰=۰ \Rightarrow x^{۲}+۸x+۱۰=۰$$

چون $\Delta=۸^{۲}-۴\times۱\times۱۰>۰$ است، پس معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

می‌دانیم $\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta$ و α و β ریشه‌های معادلهٔ فوق هستند؛ بنابراین: $\alpha+\beta=-۸, \alpha\beta=۱۰$

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=(-۸)^{۲}-۲(۱۰)=۶۴-۲۰=۴۴$$

دقت کنید! اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه:

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & x & ۰ \\ -۲ & ۱ & x+۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & x & ۰ \\ -۲ & ۱ & x+۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ -۳-۲x \\ -۹-x \end{bmatrix}$$

حالا باید $[۳\ \ ۳\ \ -۲x]$ را در ماتریس بالا ضرب کنیم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$[۳\ \ ۳\ \ -۲x]\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & x & ۰ \\ -۲ & ۱ & x+۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow [۳\ \ ۳\ \ -۲x]\begin{bmatrix} -۱ \\ -۳-۲x \\ -۹-x \end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow -۳+(-۹-۶x)+(۱۸x+۲x^{۲})=۰ \Rightarrow ۲x^{۲}+۱۲x-۱۲=۰$$

ما به دنبال مجموع معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+۶x-۶=۰$ هستیم.

فرض کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند، حاصل $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$ جواب سؤال است.

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-۶}{-۶}=۱$$

دقت کنید! اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه:

مجموع ریشه‌ها $=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

۳۳- گزینهٔ ۴ B را از سمت چپ فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$B\left(\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}A+\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ -۳ & -۳ \end{bmatrix}A\right)=B\left(\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ -۳ & -۳ \end{bmatrix}\right)A$$

با جمع دو ماتریس بین B و A، نتیجهٔ جالبی به دست می‌آید.

$$B\left(\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}\right)A=B(-۳I)A=-۳(BI)A=-۳BA$$

$$=-۳\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۹ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس فوق برابر با $۰+۳-۶-۹=-۱۲$ است.

۳۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $A^{۲}=A\times A$، پس:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ m & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ m & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱-m & -۲ \\ ۲m & ۱-m \end{bmatrix}$$

بنابراین باید:

$$\begin{bmatrix} ۱-m & -۲ \\ ۲m & ۱-m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ -۶ & a_{۲۲} \end{bmatrix} \Rightarrow ۲m=-۶ \Rightarrow m=-۳$$

۳۵- گزینهٔ ۴ راهی نداریم جز این‌که A را به توان ۲ برسانیم.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & a \\ ۱ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & a \\ ۱ & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+a & ۲a+ab \\ ۲+b & a+b^{۲} \end{bmatrix}$$

سؤال، $A^{۲}$ را به ما داده، پس می‌توانیم a و b را کشف کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۴+a & ۲a+ab \\ ۲+b & a+b^{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۴+a=۳ \Rightarrow a=-۱ \\ ۲+b=۵ \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

بنابراین:

$$[-(b+1)\quad -a]\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=[-4\quad 1]\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=[4+3]=7$$

۳۶- **گزینهٔ ۲** *بدون فوت وقت!* A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}$$

$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ را از قبل می‌شناسیم. (بله! I ماتریس همانی است.)

$$A^2=\alpha A+\beta I \Rightarrow \begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha&\alpha\\5\alpha&4\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta-2\alpha&\alpha\\5\alpha&4\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

کاملاً واضح است که $\alpha=2$ است. با قراردادن $\alpha=2$ در معادلهٔ $\beta-2\alpha=9$، داریم: $\beta-4=9 \Rightarrow \beta=13$

بنابراین دوتایی (α,β)، $(2,13)$ است.

روش دوم شاید اسم مرحوم همیلتن و شادروان کِیلی به گوشتان خورده باشد! نخستین بار مفهوم ماتریس در کارهای این دو نفر طرح شده. رابطه‌ای به نام کِیلی- همیلتن نام‌گذاری شده که در حل این سؤال به ما کمک می‌کند.

رابطهٔ کِیلی ـ همیلتن می‌گوید: «هر ماتریس 2×2 به شکل $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در رابطهٔ $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$ صدق می‌کند.»

به کمک رابطهٔ کِیلی ـ همیلتن داریم: $A^2-(-2+4)A+(-8-5)I=\bar{O}$

$$\Rightarrow A^2=2A+13I \Rightarrow \alpha=2,\beta=13$$

۳۷- **گزینهٔ ۲** اول ماتریس را مشخص می‌کنیم. $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

حالا A^2 و $4A$ را به دست می‌آوریم و مجموع درایه‌های A^2-4A را به عنوان جواب اعلام می‌کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^2-4A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس A^2-4A برابر با ۱۵ است.

۳۸- **گزینهٔ ۲** ابتدا A^2 را پیدا می‌کنیم تا بعد ببینیم چه اتفاقی می‌افتد ...

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

حالا که A^2 پیدا شد، می‌توانیم A^3، A^4 و ... را پیدا کنیم.

$$A^3=A^2\times A=IA=A \qquad A^4=A^3\times A=A\times A=A^2=I$$

$$A^5=A^4\times A=IA=A \qquad A^6=A^5\times A=A\times A=A^2=I$$

$$A^7=A^6\times A=IA=A$$

بنابراین:

$$A^7-A^4=A-I=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-3\end{bmatrix}$$

روش دوم بد نیست بدانید که اگر $A^2=I$ باشد به ماتریس A متناوب می‌گویند؛ توان‌های زوج ماتریس A برابر I و توان‌های فرد ماتریس A برابر با خود ماتریس A می‌شوند.

در این سؤال $A^2=I$ شده، پس $A^7=A$ و $A^4=I$ است و ...

۳۹- **گزینهٔ ۱** با توجه به دو نکتهٔ زیر به سؤال پاسخ می‌دهیم.

① اگر $C\times D=E$ باشد، درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس E از ضرب سطر iاُم ماتریس C در ستون jاُم ماتریس D به دست می‌آید.

② می‌دانیم $A^3=A^2\times A$

بنابراین درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 از ضرب **سطر دوم ماتریس A^2 در ستون سوم ماتریس A** به دست می‌آید.

به درایه‌های سطر دوم ماتریس A^2 نیاز داریم که از ضرب سطر دوم A در ماتریس A به دست می‌آید.

$$[0\quad 1\quad x]\begin{bmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{bmatrix}=[0\quad 1\quad 2x]$$

حالا می‌توانیم درایهٔ سطر دوم و ستون سوم A^3 را به دست آوریم.

درایهٔ سطر دوم و ستون سوم A^3

(ستون سوم ماتریس A) × (سطر دوم ماتریس A^2) =

$$=[0\quad 1\quad 2x]\begin{bmatrix}y\\x\\1\end{bmatrix}=0+x+2x=3x$$

می‌توانستیم A^2 را به دست آوریم و در A ضرب کنیم تا A^3 به دست آید و از روی A^3، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم را اعلام کنیم.

۴۰- **گزینهٔ ۴** ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&24\\-2&-3&-7\\4&1&9\end{bmatrix}$$

چون سؤال فقط سطر اول A^3 را خواسته، کافی است سطر اول A^2 را در A ضرب کنیم.

$$A^3=\begin{bmatrix}6&2&24\\-2&-3&-7\\4&1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30&6&86\\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

۴۱- **گزینهٔ ۲** ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

کافی است سطر اول A^2 را در A^2 ضرب کنیم تا سطر اول A^4 مشخص شود.

$$A^4=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\&&\\&&\end{bmatrix}$$

۴۲- گزینهٔ ۳ ماتریس همانی (I) را می‌شناسیم (درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس همانی ۱ و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفرند).

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

بدون معطلی باید توان‌های دوم و سوم و بعد توان ششم $A+I$ را پیدا کنیم.

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^3=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&13\\13&14\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^6=(A+I)^3\,(A+I)^3$$

$$=\begin{bmatrix}14&13\\13&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14&13\\13&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}365&364\\364&365\end{bmatrix}$$

بنابراین: $a-b=365-364=1$

از روی $(A+I)^2$ و $(A+I)^3$ نیز می‌شد حدس زد که $a-b$ برابر یک می‌شود!

۴۳- گزینهٔ ۲ به نظر می‌آید راهی به‌جز به توان رساندن نداریم!

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$$

از به دست آوردن A^4 راحت شدیم! $A^4=A^3\times A=\bar{O}$

بنابراین: $$A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\bar{O}+\bar{O}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^2+A^3+A^4$ برابر با $1+2+1=4$ است.

روش دوم توان سوم به بعد ماتریس‌های $\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&c&0\end{bmatrix}$، صفر است. (قدیما می‌گفتند! این ماتریس‌ها پوچ‌توان از مرتبهٔ ۳ هستند؛ یعنی $(A^3=\bar{O}\Rightarrow A^{n\geq 3}=\bar{O}$).

$A^3=\bar{O}$ و $A^4=\bar{O}$ است؛ بنابراین فقط $A+A^2$ را به دست می‌آوریم.

$$A+A^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^2+A^3+A^4$ برابر ۴ است.

۴۴- گزینهٔ ۲ دو نکته را با هم مرور می‌کنیم و سپس به سؤال پاسخ می‌دهیم.

① اگر $A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$ باشد (یعنی A یک ماتریس قطری باشد)، $A^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$ است.

② اگر $A=\begin{bmatrix}a&0&0\\d&b&0\\e&f&c\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a'&0&0\\d'&b'&0\\e'&f'&c'\end{bmatrix}$ باشند، AB به صورت $\begin{bmatrix}aa'&0&0\\\bigcirc&bb'&0\\\bigcirc&\bigcirc&cc'\end{bmatrix}$ است.

(به ماتریسی که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس پایین‌مثلثی گویند.)

با توجه به نکات بالا داریم: $$B^2=\begin{bmatrix}1^2&0&0\\0&(-2)^2&0\\0&0&2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

$$B^2A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\2&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\\bigcirc&-12&0\\\bigcirc&\bigcirc&8\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های روی قطر اصلی B^2A برابر با $-1+(-12)+8=-5$ است.

۴۵- گزینهٔ ۲ در روش معمول باید A^2 را پیدا کنیم و در B ضرب کنیم تا درایهٔ مورد نظر سؤال را پیدا کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\1&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\1&0&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&9&0\\-7&0&25\end{bmatrix}$$

$$A^2B=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&9&0\\-7&0&25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-4\\18&9\\68&-43\end{bmatrix}$$

درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم A^2B برابر با -43 است.

روش دوم درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس ABC این‌طوری به دست می‌آید: [سطر iاُم A]×B×[ستون jاُم C]

بنابراین: درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم A^2B

= [سطر سوم A]×A×[ستون دوم B]

درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم A^2B

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\1&0&-5\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

$$=7-50=-43$$

۴۶- گزینهٔ ۳ به نظر می‌آید راهی غیر از یافتن A^2، A^3 و ... نداریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^6=A^3\times A^3=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&21\\0&1&6\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ما فقط ستون دوم ماتریس A^6 را می‌خواستیم (می‌توانستیم فقط درایه‌های سطر اول، دوم و سوم را در درایه‌های ستون دوم ضرب و با هم جمع کنیم).

مجموع درایه‌های ستون دوم $A^6 = 6+1+0=7$

۴۷- گزینهٔ ۲ یک راه این است که A^2 را بیابیم، بعد A^2 را در A^2 و سپس حاصل را در A^2 ضرب کنیم

(می‌توانید A^2 را در A ضرب کنید و A^3 را به دست آورید و در A^3 ضرب کنید تا A^6 به دست آید).

$$A^2=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&6&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9&9\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^6=A^3\times A^3=\begin{bmatrix}1&9&9\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&9&9\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&18&18\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر اول A^6 برابر است با: $1+18+18=37$

روش دوم با توجه به A، A^2 و A^3 می‌شود حدس زد که A^n به شکل مقابل است:

$$A^n=\begin{bmatrix}1&3n&3n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

یعنی مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A^n، $6n+1$ است؛ اگر به جای n عدد ۶ قرار دهیم، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A^6 برابر می‌شود با: $6\times6+1=37$

۴۸- گزینهٔ ۴ همین اول در مورد گزینه‌ها توضیح کوتاهی بدهیم!
اگر تمام درایه‌های پایین قطر اصلی برابر صفر باشند به ماتریس، بالامثلثی و اگر تمام درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند به ماتریس پایین‌مثلثی می‌گویند.
اگر تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس برابر صفر باشند، به این ماتریس، قطری می‌گویند و اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر یک باشند، به این ماتریس، ماتریس همانی (واحد) گویند.

برای این‌که به A^4 برسیم باید A^2 را به دست آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

A^2 را در خودش ضرب می‌کنیم و به A^4 می‌رسیم! به همین سادگی

$$A^4=A^2\times A^2=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

بنابراین A^4، همانی است.

۴۹- گزینهٔ ۳ A^2 را به دست می‌آوریم تا ببینیم بعد چه پیش می‌آید ...

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}=-3A$$

بنابراین: $A^3=A^2\times A=(-3A)A=-3A^2=-3(-3A)=3^2A$

$$A^4=A^3\times A=3^2A\times A=3^2\times A^2=3^2(-3A)=-3^3A$$

$$A^5=A^4\times A=-3^3A\times A=-3^3A^2=-3^3(-3A)=3^4A$$

مجموع درایه‌های A برابر ۹- یا -3^2 است، پس مجموع درایه‌های A^5 برابر با $3^4\times(-3^2)=-3^6$ خواهد بود.

اگر دنبال A^n بودیم از روی $A^2=-3A$، $A^3=3^2A$، $A^4=-3^3A$ و ... می‌توانستیم حدس بزنیم $A^n=(-3)^{n-1}A$ است.

۵۰- گزینهٔ ۳ طبق معمول اول باید A^2 را به دست آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

باید رابطه‌ای بین A، A^2، A^3 و ... بیابیم.

$$A^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

خیلی راحت می‌توان حدس زد که A^n به شکل $\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$ خواهد بود.

بنابراین: $A^{12}+A^{13}=\begin{bmatrix}1&12\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&13\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&25\\0&2\end{bmatrix}$

مجموع درایه‌های ماتریس $A^{12}+A^{13}$ برابر است با: $2+25+2=29$

۵۱- گزینهٔ ۲ واضح است که باید A^2 را به دست بیاوریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}=-2I$$

حالا باید تکلیف A^4 و A^{12} را روشن کنیم.

$$A^4=(A^2)^2=(-2I)^2=4I^2=4I$$

$$A^{12}=(A^4)^3=(4I)^3=64I$$

برگردیم به سؤال ببینیم چه چیزی از ما خواسته بود!

$$A^{12}=(kA)^4=k^4A^4=k^4(4I)=4k^4I$$

$$4k^4I=64I \Rightarrow k^4=16 \Rightarrow k=\pm2$$

۵۲- گزینهٔ ۴ توان‌های ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ به ما نشان می‌دهند که اول باید توان دوم ماتریس A را پیدا کنیم و با توجه به A^2 در مورد ادامهٔ مسیر تصمیم بگیریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$A^2=I$ شد، پس A متناوب است؛ یعنی اگر A به توان طبیعی و زوج برسد برابر I و اگر A به توان طبیعی و فرد برسد برابر با A می‌شود. بنابراین:

$$A^{1400}-A^{1401}=I-A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\0&0\end{bmatrix}$$

۵۳- گزینهٔ ۴ چون توان ماتریس A خواسته شده، اول A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&0\\m&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\m&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$A^2=I$ شد یعنی ماتریس A، متناوب است، پس:

$$\begin{cases}A^{\text{زوج}}=I\\A^{\text{فرد}}=A\end{cases}$$

بنابراین:

$$A^{2n}-A^{2n-1}=I-A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0\\m&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\-m&0\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $A^{2n}-A^{2n-1}$ برابر ۷ شده، یعنی $2-m=7$ و $m=-5$ است.

۵۴- گزینهٔ ۳ A^2 را به دست می‌آوریم تا راهی برای رسیدن به A^{2021} پیدا کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}-2&-3\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-3\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=4I$$

مسیر برای یافتن A^{2021} هموار شد

$$A^{2021}=(A^2)^{1010}\times A=(4I)^{1010}\times A$$
$$=2^{2020}(I^{1010})\times A=2^{2020}A$$

اگر از ما A^{2022} خواسته شده بود، می‌گفتیم $2^{2022}I$، زیرا:

$$A^{2022}=(A^2)^{1010}\times A^2=2^{2020}I\times(4I)=2^{2022}I$$

دقت کنید! $I^n=I \quad (n\in\mathbb{N})$

۵۵- گزینهٔ ۱ با تعریف داده‌شده، A را می‌نویسیم و چون توان ۱۴۰۰ از A خواسته شده، اول A^2 را پیدا می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

A^2 هیچ‌کدام از ماتریس‌های خاص نیست، مجبوریم A^3 را نیز به دست بیاوریم و بعد تصمیم بگیریم.

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

به جای خوبی رسیدیم. حالا می‌توانیم به کمک A^3، A^{1400} را به دست آوریم.

$$A^{1400}=(A^3)^{466}\times A^2=(-I)^{466}\times A^2=I\times A^2=A^2$$

۵۶- گزینهٔ ۱ *تابلوئه* که باید تکلیف $\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}^{12}$ را روشن کنیم.

در گام اول توان دوم ماتریس $\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}$$

باید توان سوم ماتریس $\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$ را هم به دست بیاوریم تا بتوانیم در مورد توان‌های بعدی اظهار نظر کنیم.

$$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-6&1\end{bmatrix}$$

از توان اول، دوم و سوم ماتریس $\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0\\-2n&1\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}^{12}=\begin{bmatrix}1&0\\(-2)\times12&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-24&1\end{bmatrix}$$

با ضرب ماتریس‌های داده‌شده در صورت سؤال، مقادیر a، b، c و d مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix}12&1\\-24&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}^{12}=\begin{bmatrix}12&1\\-24&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-24&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-12&1\\0&-1\end{bmatrix}$$

پس:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}12&1\\-24&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}^{12}}\begin{bmatrix}1&-2\\6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\6&-3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-6&21\\-6&3\end{bmatrix}$$

از $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&21\\-6&3\end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم:

$$a=-6,\ b=21,\ c=-6,\ d=3$$

بنابراین:

$$a+b+c-d=-6+21-6-3=6$$

۵۷- گزینهٔ ۳ با مرتب‌کردن رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$4A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a^2-2b&a+2b\\(b-1)^2-2a&a-b-3\end{bmatrix}$$

با توجه به این‌که A قطری است، پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفرند. یعنی:

$$\begin{cases}a+2b=0 \Rightarrow a=-2b\\(b-1)^2-2a=0 \Rightarrow 2a=(b-1)^2\end{cases}$$
$$\Rightarrow (b-1)^2=-4b \Rightarrow b^2-2b+1=-4b$$
$$\Rightarrow b^2+2b+1=0 \Rightarrow (b+1)^2=0$$
$$\Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=2$$

با جای‌گذاری $a=2$ و $b=-1$ به $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ می‌رسیم.

ماتریس A قطری است. برای به دست آوردن A^{1401} کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان ۱۴۰۱ برسانیم.

$$A^{1401}=\begin{bmatrix}2^{1401}&0\\0&(\frac{1}{2})^{1401}\end{bmatrix} \Rightarrow \text{ضرب درایه‌های روی قطر اصلی}=1$$

۵۸- گزینهٔ ۳ اگر A^2 را به دست آورید می‌بینید که $A^2=I$ خواهد شد.

یاد بگیرید! که اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{a}\\0&1&0\\a&0&0\end{bmatrix}$ باشد $A^2=I$ است.

بنابراین:

$$B^2+C^2=(I-A)^2+(A+I)^2$$
$$=I^2-2AI+A^2+(A^2+2AI+I^2)$$
$$=I-2A+A^2+A^2+2A+I=2A^2+2I$$

از آن‌جا که $A^2=I$ است، پس: $B^2+C^2=2A^2+2I=2I+2I=4I$

دقت کنید! ۱ در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند؛ اما اتحادها بین دو ماتریس A و I برقرارند.

۲ $I^n=I$

۳ اگر $A^2=I$ باشد (به ماتریس A، متناوب گویند)، آن‌گاه:

$$\begin{cases}A^{2n}=I\\A^{2n-1}=A\end{cases}$$

۵۹- گزینهٔ ۴ از تعویض‌پذیری دو ماتریس A و B نتیجه می‌گیریم $AB=BA$ است. باید ببینیم سؤال از ما چه می‌خواهد تا مسیر مناسب برای حل را انتخاب کنیم.

$$(2A-B)(A+3B)=2A^2+6\underbrace{AB}_{BA}-BA-3B^2$$
$$=2A^2+5BA-3B^2$$

کار خاصی نکردیم! دو پرانتز را در هم ضرب کردیم (حواسمان بود که ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد و ترتیب ماتریس‌ها در ضرب مهم است.)

چون می‌دانستیم $AB=BA$ است، به جای AB، ماتریس BA را قرار دادیم. همین.

A^2، B^2 و BA را داریم، پس می‌توانیم حاصل $(2A-B)(A+3B)$ را پیدا کنیم.

$$(2A-B)(A+3B)=2A^2+5BA-3B^2$$
$$=2\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}4&4\\6&10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}10&-2\\-3&7\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow (2A-B)(A+3B)=\begin{bmatrix}14&20\\30&44\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}20&20\\30&50\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}30&-6\\-9&21\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4&46\\69&73\end{bmatrix}$$

۶۰- گزینهٔ ۲ در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت تعویض‌پذیری ندارد؛ یعنی در ماتریس خیلی وقت‌ها $AB=BA$ نیست. مثلاً اتحاد $(A+B)^2$ در ماتریس‌ها به این شکل باز می‌شود.

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

حالا که A^2، B^2 و $A+B$ را داریم، می‌توانیم با استفاده از اتحاد اشاره‌شده، $AB+BA$ را به دست آوریم.

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&12\\12&13\end{bmatrix}$$

بنابراین: $(A+B)^2-A^2-B^2=AB+BA$

$$\begin{bmatrix}13&12\\12&13\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}0&3\\-3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&3\\9&7\end{bmatrix}\right)=AB+BA$$

پس: $AB+BA=\begin{bmatrix}13&12\\12&13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&6\\6&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\6&3\end{bmatrix}$

۶۱- گزینهٔ ۴ یک راه این است که به جای A، $B+C$ جایگزین کنیم و حاصل را به دست آوریم؛ این راه کمی طولانی است! ما با دسته‌بندی و فاکتورگرفتن کمی راحت‌تر سؤال را حل می‌کنیم. ببینید

با توجه به رابطهٔ $A=B+C$ داریم: $A-B=C$

$$(A^2-AB)+(B^2-BA)=A(A-B)+B(B-A)$$
$$=A(C)+B(-C)=AC-BC=(A-B)C=C^2$$

روش دوم شاید باورتان نشود! $A^2+B^2-AB-BA$ بازشدهٔ $(A-B)^2$ است.

$$A^2+B^2-AB-BA=(A-B)(A-B)=(A-B)^2=C^2$$

دقت کنید! در حالت کلی ضرب دو ماتریس خاصیت تعویض‌پذیری ندارد؛ یعنی در ماتریس‌ها خیلی اوقات $AB=BA$ **نیست**.

۶۲- گزینهٔ ۲ اگر ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری) داشته باشد، اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است و برعکس!

در این‌جا برای A و B، اتحاد برقرار است پس ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی باید $AB=BA$ باشد، پس:

$$\begin{bmatrix}x&y\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-3\\-3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-3\\-3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\2&-1\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix}-4x-3y&-3x-4y\\-5&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4x-6&-4y+3\\-3x-8&-3y+4\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-3x-8=-5\Rightarrow -3x=3\Rightarrow x=-1\\-3y+4=-2\Rightarrow -3y=-6\Rightarrow y=2\end{cases}$$

اگر به جای x و y مقادیر آن‌ها را جایگزین کنیم، خواهید دید که بقیهٔ درایه‌های ماتریس هم با هم برابرند.

حالا باید خواستهٔ سؤال را برآورده کنیم!

$$[x\ \ 2\ \ -y]\begin{bmatrix}1\\2\\-x\end{bmatrix}\Rightarrow[-1\ \ 2\ \ -2]\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=-1+4-2=1$$

۶۳- گزینهٔ ۴ $A^2+AB+BA+B^2$ همان $(A+B)^2$ است.

(می‌دانیم که در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند.)

از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال نتیجه می‌گیریم: $A+B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

باید $A+B$ را به توان ۲ برسانیم تا بعد ببینیم چه عملیاتی ما را به پاسخ می‌رساند.

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}I$$

تقریباً به پاسخ سؤال نزدیک شدیم.

$$(A^2+AB+BA+B^2)^3=((A+B)^2)^3=(\frac{-1}{2}I)^3$$
$$=-\frac{1}{8}I^3=-\frac{1}{8}I=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8}&0\\0&-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $(A^2+AB+BA+B^2)^3$ برابر است با: $-\frac{1}{8}+(-\frac{1}{8})=-\frac{1}{4}$

۶۴- گزینهٔ ۲ داریم:

$$A^2 = 2A + I$$

طرفین تساوی بالا را در A^2 ضرب می‌کنیم و هر جا A^2 دیدیم به جای آن $2A + I$ قرار می‌دهیم.

$$A^2 \times A^2 = A^2(2A+I) \Rightarrow A^4 = (2A+I)(2A+I)$$

$$\Rightarrow A^4 = 4A^2 + 4A + I \Rightarrow A^4 = 4(2A+I) + 4A + I$$

$$\Rightarrow A^4 = 12A + 5I$$

کافی است طرفین تساوی بالا را در A ضرب کنیم تا A^5 به دست آید.

$$A \times A^4 = A(12A+5I) \Rightarrow A^5 = 12A^2 + 5A$$

$$\Rightarrow A^5 = 12(2A+I) + 5A \Rightarrow A^5 = 29A + 12I$$

بنابراین: $A^5 - A^4 = (29A+12I) - (12A+5I) = 17A + 7I$

حواسمان‌هست! که:

۱ I به هر توانی برسد خودش می‌شود ($I^n = I$).

۲ ضرب هر ماتریسی در I خودش می‌شود ($AI = IA = A$).

۶۵- گزینهٔ ۴ A^2 را داریم. *(از کجا؟! خودِ سؤال داده!)*

$$A^2 = A - I$$

A^2 ماتریس خاصی نیست که بتوانیم A^{2021} را راحت پیدا کنیم.

A^3 را به دست می‌آوریم، شاید کمکی کرد.

$$A^3 = A^2 \times A = (A-I) \times A$$

$$= A^2 - A = (A-I) - A = -I$$

دقت‌کنید! به جای A^2، $A - I$ جایگزین کردیم.

A^{2021} را تبدیل به توان‌های ۳ از A می‌کنیم:

$$A^{2021} = (A^3)^{673} \times A^2$$

$$\Rightarrow A^{2021} = (-I)^{673} \times A^2 = -I \times (A-I) = (I-A)$$

۶۶- گزینهٔ ۴ برای رسیدن به B^{1401} باید B^2 را به دست آوریم.

$$A + B = I - A \Rightarrow B = I - 2A$$

$$\Rightarrow B^2 = (I-2A)^2 = I^2 - 4AI + 4A^2 = 4A^2 - 4A + I$$

سؤال گفته $A^2 = A$ است، پس: $B^2 = 4(A) - 4A + I = I$

آخرین مرحله، ساختن B^{1401} است.

$$B^{1401} = (B^2)^{700} \times B = I^{700} \times B = I \times B = B$$

دقت‌کنید! ۱ $I^2 = I$ (اصولاً I به توان عدد حسابی برسد، برابر با I می‌شود).

۲ A و I تعویض‌پذیرند، یعنی $AI = IA$.

۶۷- گزینهٔ ۳ از قبل با خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها آشنا هستیم: $(AB)C = A(BC)$

با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری و مفروضات داده‌شده در تست داریم:

$$B^2 = B \times B = (BA)B = B(AB) = BA = B$$

۶۸- گزینهٔ ۲ با فاکتورگیری A از رابطهٔ $A^2 - AB + kB$ و جایگزین‌کردن $-kI$ به جای $A - B$ داریم:

$$A(A-B) + kB = A(-kI) + kB = -kA + kB$$

$$= -k(A-B) = -k(-kI) = k^2 I$$

۶۹- گزینهٔ ۳ از رابطهٔ داده‌شده باید A^2 و B^2 بسازیم.

با ضرب طرفین رابطهٔ $AB = B$ در B (از چپ) داریم:

$$AB = B \xrightarrow{B\times} (BA)B = B^2 \xrightarrow{BA=A} AB = B^2$$

$$\xrightarrow{AB=B} B = B^2$$

با ضرب طرفین رابطهٔ $BA = A$ در A (از چپ) داریم:

$$BA = A \xrightarrow{A\times} (AB)A = A^2$$

$$\xrightarrow{AB=B} BA = A^2 \xrightarrow{BA=A} A = A^2$$

بنابراین: $A^2 B^2 = AB = B$

روش‌دوم این‌طوری هم می‌شه ...

$$AB = B \xrightarrow{\times A} A(BA) = BA \xrightarrow{BA=A} A^2 = A$$

$$BA = A \xrightarrow{\times B} B(AB) = AB \xrightarrow{AB=B} B^2 = B$$

پس: $A^2 B^2 = AB = B$

۷۰- گزینهٔ ۴ از رابطهٔ $A + B = I$ نتیجه می‌گیریم $B = I - A$ است.

درست است که در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند؛ اما چون ضرب A و I تعویض‌پذیر است ($AI = IA = A$)، اتحادهای درجه ۲ در مورد A و I برقرارند (یک‌وقت فکر نکنید اتحادهای درجه ۳ برقرار نیستند، چون این‌جا کاری با آن‌ها نداریم در مورد آن‌ها حرفی نمی‌زنیم!)، بنابراین:

$$B^2 = (I-A)^2 = I^2 - 2AI + A^2 \Rightarrow B^2 = A^2 - 2A + I$$

$$\xrightarrow{B^2=-B} -B = A^2 - A + (-A + I)$$

$$\xrightarrow{I-A=B} -B = A^2 - A + B \Rightarrow A^2 = A - 2B$$

$$\xrightarrow{\pm B} A^2 = A + \underbrace{B - B} - 2B \xrightarrow{A+B=I} A^2 = I - 3B$$

حالا باید $A^2 B$ را بیابیم.

$$A^2 = I - 3B \xrightarrow{\times B} A^2 B = (I-3B)B \Rightarrow A^2 B = IB - 3B^2$$

با توجه به این‌که $B^2 = -B$ است، داریم:

$$A^2 B = B - 3B^2 \Rightarrow A^2 B = B - 3(-B) \Rightarrow A^2 B = 4B$$

روش‌دوم مثال هم چیز خوبی است!

فرض کنید $B = -I$ و $A = 2I$ باشد که در هر دو رابطهٔ $B^2 = -B$ و $A + B = I$ صدق می‌کنند، باید $A^2 B$ را به دست آوریم.

$$A^2 B = (2I)^2 (-I) = (4I^2)(-I) = -4I$$

در گزینه‌ها به جای B، $-I$ قرار می‌دهیم، هر کدام که $-4I$ داد قابل قبول است؛ ۴ $-4I$ می‌دهد، پس همین گزینه درست است.

۷۱- گزینهٔ ۳ خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها را به یاد دارید؟! می‌گفت

$$A(BC) = (AB)C$$

سؤال از ما B^3 خواسته و عباراتی را هم به ما داده که به کمک آن‌ها پاسخ را پیدا کنیم.

$$B^3 = B \times B^2 \xrightarrow{B=BA} B^3 = (BA)B^2$$

$$= B(AB^2) \xrightarrow{AB^2=A} B^3 = BA \xrightarrow{BA=B} B^3 = B$$

۷۲- گزینهٔ ۴ طرفین رابطهٔ $B-A=I$ را از چپ در B ضرب می‌کنیم تا $B^۲$ ایجاد شود.

$$B-A=I \xrightarrow{B\times} B^۲-BA=BI \Rightarrow B^۲-BA=B \quad (۱)$$

یک بار هم طرفین رابطه را از راست در B ضرب می‌کنیم.

$$B-A=I \xrightarrow{\times B} B^۲-AB=IB \Rightarrow B^۲-AB=B \quad (۲)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\boxed{AB=BA}$

از رابطه‌های (۱) و (۲) و $B^۲=B+I$ نتایج دیگری هم می‌توانیم بگیریم:

$$B^۲-BA=B \xrightarrow{B^۲=B+I} (B+I)-BA=B$$

$$\Rightarrow \boxed{BA=I} \xrightarrow{B\times} \boxed{B^۲A=B}$$

$$B^۲-AB=B \xrightarrow{B^۲=B+I} (B+I)-AB=B$$

$$\Rightarrow \boxed{AB=I} \xrightarrow{A\times} \boxed{A^۲B=A}$$

۷۳- گزینهٔ ۱ باید سعی کنیم از رابطه‌های داده‌شده به توان‌های A برسیم.

اگر طرفین رابطهٔ $BA=۲A$ را از چپ در A ضرب کنیم، داریم:

$$ABA=A(۲A) \Rightarrow (AB)A=۲A^۲ \xrightarrow{AB=B} BA=۲A^۲$$

با توجه به فرض سؤال، $A^۲$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases}BA=۲A^۲\\ BA=۲A\end{cases} \Rightarrow ۲A^۲=۲A \Rightarrow A^۲=A$$

به راحتی می‌توانیم $A^۴$ و $A^۷$ را از روی $A^۲=A$ به دست آوریم.

$$A^۲=A \xrightarrow{\text{توان۲}} A^۴=A^۲ \xrightarrow{A^۲=A} \boxed{A^۴=A}$$

$$\xrightarrow{\times A^۲} A^۶=A^۳ \xrightarrow{\times A} A^۷=A^۴ \xrightarrow{A^۴=A} A^۷=A$$

بنابراین: $۲A^۷-۳A^۴=۲A-۳A=-A$

دقت کنید! اگر $A^۲=A$ باشد به ماتریس A خودتوان گویند؛ یعنی A به هر توانی (البته توان طبیعی) برسد، خودش می‌شود.

$$A^۲=A \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} A^n=A$$

پس: $A^۴=A^۷=A \Rightarrow ۲A^۷-۳A^۴=۲A-۳A=-A$

۷۴- گزینهٔ ۲ $A(BA)^۴B$ را از ما خواسته! بازش کنیم ببینیم با چه چیزی روبه‌رو هستیم ...

$$A(BA)^۴B=A(BA)(BA)(BA)(BA)B$$

$$=(AB)(AB)(AB)(AB)(AB)=(AB)^۵$$

در واقع سؤال $(AB)^۵$ را می‌خواسته اما با کمی شیطنت!!!

اول $(AB)^۲$ را پیدا می‌کنیم و کم‌کم پیش می‌رویم تا به $(AB)^۵$ برسیم.

$$(AB)^۲=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}$$

$$(AB)^۴=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}$$

$$(AB)^۵=(AB)^۴(AB)=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&-۲\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $(AB)^۵$ برابر با $۱+(-۱)+۲+(-۲)=۰$ است.

۷۵- گزینهٔ ۲ باید بتوانیم از روی $AB=۲BA$، $AB^۳$ و $B^۳A$ بسازیم.

اگر طرفین رابطهٔ $AB=۲BA$ را از راست در $B^۲$ ضرب کنیم، داریم:

$$AB=۲BA \xrightarrow{\times B^۲} AB^۳=۲BAB^۲ \Rightarrow AB^۳=۲B(AB)B$$

$$\xrightarrow{AB=۲BA} AB^۳=۲B(۲BA)B \Rightarrow AB^۳=۴B^۲(AB)$$

$$\xrightarrow{AB=۲BA} AB^۳=۴B^۲(۲BA) \Rightarrow AB^۳=۸B^۳A$$

$$\xrightarrow{\div۸} B^۳A=\frac{۱}{۸}AB^۳$$

بنابراین $k=\frac{۱}{۸}$ است.

۷۶- گزینهٔ ۲ از $۲A+۳B=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم: $B=-\frac{۲}{۳}A$

از $A^۲=-\frac{۳}{۲}A$ هم نتیجه می‌گیریم:

$$A^۴=(-\frac{۳}{۲}A)^۲=\frac{۹}{۴}A^۲=\frac{۹}{۴}(-\frac{۳}{۲}A)=-\frac{۲۷}{۸}A$$

بنابراین:

$$A(A+B)(۲A-B)(A-B)$$

$$=A(A-\frac{۲}{۳}A)(۲A+\frac{۲}{۳}A)(A+\frac{۲}{۳}A)$$

$$=A(\frac{A}{۳})(\frac{۸A}{۳})(\frac{۵A}{۳})=\frac{۴۰A^۴}{۲۷}=\frac{۴۰(-\frac{۲۷}{۸}A)}{۲۷}=-۵A$$

۷۷- گزینهٔ ۴ اگر $A\times B=C$ باشد، درایه‌های واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس C از حاصل‌ضرب سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B به دست می‌آید.

از ما درایهٔ واقع در سطر چهارم و ستون سوم AB (یعنی $C_{۴۳}$) را خواسته، بنابراین این درایه از ضرب سطر چهارم A در ستون سوم B به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}۰&۵&۲&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\\ ۵\\ ۰\end{bmatrix}=(۰\times(-۱))+(۵\times۲)+(۲\times۵)+((-۱)\times۰)=۲۰$$

۷۸- گزینهٔ ۱ باید ضرب کنیم دیگه

$$\begin{bmatrix}۱&-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&x\\ -x&۰&-۱\\ ۳&-۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+۸&-۳&x+۳\end{bmatrix}$$

حالا باید ماتریس بالا را در $\begin{bmatrix}-۲\\ -۱۰\\ -x\end{bmatrix}$ ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix}x+۸&-۳&x+۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\ -۱۰\\ -x\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow -۲x-۱۶+۳۰-x^۲-۳x=۰$$

$$\Rightarrow -x^۲-۵x+۱۴=۰ \Rightarrow x^۲+۵x-۱۴=۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $=-\frac{۱۴}{۱}=-۱۴$

تذکر می‌دانیم حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر با $\frac{c}{a}$ است.

۷۹- گزینهٔ ۳ $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم و بعد تصمیم می‌گیریم چه‌طور به $A^{۶}$ برسیم.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۳&۳\\۳&۳&۳\\۳&۳&۳\end{bmatrix}=۳A$$

بنابراین:

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=۳A\times A=۳A^{۲}=۳(۳A)=۹A$$

$$A^{۶}=A^{۳}\times A^{۳}=۹A\times ۹A=۸۱A^{۲}=۸۱(۳A)$$

$$=۳^{۴}\times ۳^{۱}A=۳^{۵}A$$

مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۹ یا $۳^{۲}$ است.

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۶}$ برابر $۳^{۷}=۳^{۵}\times ۳^{۲}$ است.

اگر از ما A^{n} را خواسته بود از روی $A^{۲}=۳A$، $A^{۳}=۳^{۲}A$ و ... می‌گفتیم $A^{n}=۳^{n-۱}A$ است.

۸۰- گزینهٔ ۴ از تکنیک جایگزینی! برای حل سؤال استفاده می‌کنیم:

$$BA=۳AB \Rightarrow AB=\frac{BA}{۳}$$

بنابراین:

$$mAB^{۳}=B^{۳}A \Rightarrow m(AB)B^{۲}=B^{۳}A$$

$$\Rightarrow m(\frac{BA}{۳})B^{۲}=B^{۳}A \Rightarrow m(\frac{B}{۳})(AB)B=B^{۳}A$$

$$\Rightarrow m(\frac{B}{۳})(\frac{BA}{۳})B=B^{۳}A \Rightarrow m(\frac{B}{۳})(\frac{B}{۳})(AB)=B^{۳}A$$

$$\Rightarrow m(\frac{B}{۳})(\frac{B}{۳})(\frac{BA}{۳})=B^{۳}A$$

بعد از جایگزینی‌های نفس‌گیر، می‌توانیم جواب سؤال را بدهیم.

$$\frac{m}{۲۷}B^{۳}A=B^{۳}A \Rightarrow m=۲۷$$

۸۱- گزینهٔ ۱ از $A+B=I$ نتیجه می‌گیریم: $B=I-A$

کافی است یک بار از راست و یک بار از چپ، رابطهٔ بالا را در A ضرب کنیم.

$$B=I-A \xrightarrow{A\times} AB=A-A^{۲}$$

$$\xrightarrow{A^{۲}=A} AB=A-A=\bar{O}$$

$$B=I-A \xrightarrow{\times A} BA=A-A^{۲}$$

$$\xrightarrow{A^{۲}=A} BA=A-A=\bar{O}$$

بنابراین:

$$AB=BA$$

۸۲- گزینهٔ ۲ در حالت کلی ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix}۱&۰\\a&۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۱&۰\\b&۱\end{bmatrix}$ به صورت $\begin{bmatrix}۱&۰\\a+b&۱\end{bmatrix}$ است. بنابراین:

$$\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۲&۱\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}۱&۰\\۱۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱۱&۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰-۱+۲-\cdots+۱۰-۱۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۶&۱\end{bmatrix}$$

دقت کنید! $(۰-۱)+(۲-۳)+\cdots+(۱۰-۱۱)=\underbrace{-۱-۱-\cdots-۱}_{\text{۶ جمله}}=-۶$

۸۳- گزینهٔ ۳ $A^{۲}$ را به دست بیاوریم، شاید فرجی شد ...

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=I$$

چه‌قدر خوب شد!

$$A^{۱۴۰۰}=(A^{۲})^{۷۰۰}=I^{۷۰۰}=I$$

$$A^{۱۳۹۹}=(A^{۲})^{۶۹۹}\times A=I^{۶۹۹}\times A=I\times A=A$$

بنابراین:

$$A^{۱۴۰۰}-A^{۱۳۹۹}=I-A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۰&۰&۰\\-۱&۰&۱\end{bmatrix}$$

دقت کنید! ۱ ماتریس همانی (I) به هر توانی (منظورم توان حسابی است) برسد، خودش می‌شود. $I^{n}=I$

۲ ماتریس همانی (I) در هر ماتریس هم‌مرتبه‌ای مانند A ضرب شود، حاصل A می‌شود. $I\times A=A\times I=A$

۸۴- گزینهٔ ۲ سعی می‌کنیم از روی A، $A^{۲}$، $A^{۳}$، ... و A^{n} را حدس بزنیم.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{۲}&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{۳}&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$

می‌توان گفت A^{n} به صورت $A^{n}=\begin{bmatrix}۲^{n}&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ است.

بنابراین $A^{n}-A^{n-۱}$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix}۲^{n}&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲^{n-۱}&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{n}-۲^{n-۱}&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲^{n}(۱-\frac{۱}{۲})&۰\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{n-۱}&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$$

می‌توانستید $A^{۲}$ و $A^{۳}$ را به دست آورید و تفاضل آن‌ها را در گزینه‌ها پیدا کنید. (چرا؟ چون حاصل گزینه‌ها باید به ازای هر توان طبیعی n برقرار باشد.)

$$A^{۳}-A^{۲}=\begin{bmatrix}۸&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$$

باید ببینیم به ازای $n=۳$، کدام گزینه $\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$ را به ما می‌دهد.

۲ همان گزینهٔ مطلوب ما است.

۸۵- گزینهٔ ۲ اول باید بدانیم اگر A به توان برسد چه شکلی می‌شود.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}$$

می‌توان حدس زد که A^{n} به شکل $A^{n}=\begin{bmatrix}۱&n\\۰&۱\end{bmatrix}$ خواهد بود.

بنابراین:

$$BA^{n}=\begin{bmatrix}۴&۱\\۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&n\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۴n+۱\\۳&۳n+۲\end{bmatrix}$$

پس باید: $\begin{bmatrix}۴&۴n+۱\\۳&۳n+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۴۱\\۳&۳۲\end{bmatrix} \Rightarrow ۴n+۱=۴۱ \Rightarrow n=۱۰$

دقت کنید! اگر از $۳n+۲=۳۲$ نیز، n را به دست می‌آورید ۱۰ می‌شد!

۸۶- گزینهٔ ۴ از $A^{۲} - A = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^{۲} = A$ است.

توان دوم ماتریس $(۲A - I)$ را به دست می‌آوریم ببینیم چه پیش می‌آید ...

$$(۲A - I)^{۲} = ۴A^{۲} - ۴AI + I^{۲} = ۴A^{۲} - ۴A + I$$

$$\xrightarrow{A^{۲} = A} (۲A - I)^{۲} = ۴A - ۴A + I \Rightarrow (۲A - I)^{۲} = I$$

ما $(۲A - I)^{۱۳۹۹}$ را می‌خواهیم، پس:

$$(۲A - I)^{۱۳۹۹} = (۲A - I)^{۱۳۹۸}(۲A - I) = I^{۶۹۹}(۲A - I) = ۲A - I$$

بد نیست بدانید!

اگر $A^{۲} = I$ شود، به ماتریس A متناوب گویند. ماتریس متناوب به توان زوج برسد برابر I است و اگر به توان فرد برسد، خودش می‌شود.

$$A^{۲} = I \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \begin{cases} A^{۲k} = I \\ A^{۲k-۱} = A \end{cases}$$