فهرست

فصل ۱
جبر و معادله

فصل ۲
تابع

فصل ۳
توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۴
مثلثات

فصل ۵
حد و پیوستگی

درس ۲

معادلات درجه دوم

معادلهٔ درجه‌دوم و ریشه‌های آن

در کتاب ریاضی سال دهم روش‌های حل معادلهٔ درجه‌دوم به طور کامل بررسی شد. این روش‌ها را در این‌جا با هم مرور می‌کنیم.

روش فاکتورگیری: این معادلات به فرم $ax^۲ + bx = ۰$ هستند که با فاکتورگیری در x می‌توانیم ریشه‌ها را بیابیم.

مثال:

$$۲x^۲ - ۳x = ۰ \Rightarrow x(۲x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

روش تجزیه: فرض کنید معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ به راحتی قابل تجزیه باشد، در این حالت باید دوتا عدد پیدا کنیم که مجموع آن‌ها a و حاصل‌ضرب آن‌ها b است و این دو عدد را در عبارت تجزیه‌شده قرار دهیم.

مثال:

$$x^۲ \underbrace{-۲}_{\text{مجموع}}x \underbrace{-۸}_{\text{حاصل‌ضرب}} = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = -۲ \end{cases}$$

روش کلی حل معادلهٔ درجه‌دوم: فرمول کلی حل معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ به صورت $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$ است که در آن $\Delta = b^۲ - ۴ac$ است.

مثال معادلات درجه‌دوم زیر را حل کنید.

الف) $۳x^۲ - ۴x - ۳ = ۰$ ب) $۲x^۲ + ۴x + ۳ = ۰$

پاسخ الف) دلتای معادله برابر است با: $\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۴)^۲ - ۴(۳)(-۳) = ۱۶ + ۳۶ = ۵۲$

پس جواب‌های معادله برابر است با:

$$۳x^۲ - ۴x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-(-۴) \pm \sqrt{۵۲}}{۲(۳)} = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۱۳}}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۴ + ۲\sqrt{۱۳}}{۶} = \frac{۲ + \sqrt{۱۳}}{۳} \\ x_۲ = \frac{۴ - ۲\sqrt{۱۳}}{۶} = \frac{۲ - \sqrt{۱۳}}{۳} \end{cases}$$

ب) $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۴^۲ - ۴(۲)(۳) = -۸ < ۰$

چون دلتای معادله منفی شده، در تساوی $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$، زیر رادیکال منفی می‌شود. *رادیکال هر چی زور میزنه! نمی‌تونه فروبی بده!* پس در این حالت معادله جواب حقیقی ندارد.

در حل معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ سه حالت زیر را داریم:

ریشه‌ها	ویژگی	شرط
$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}, x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$	معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.	$\Delta > ۰$
$x = \frac{-b}{۲a}$	معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد.	$\Delta = ۰$
ـــــ	معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.	$\Delta < ۰$

تست اگر $x = -۲$ یک جواب معادلهٔ $۴x^۲ + kx - k = ۷$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۱/۲۵- ۴) ۱/۷۵-

پاسخ گزینهٔ ۱ $x = -۲$ یک ریشهٔ معادله است پس در آن صدق می‌کند:

$$۴(-۲)^۲ + k(-۲) - k = ۷ \Rightarrow ۳k = ۹ \Rightarrow k = ۳$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: ۴x^۲ + ۳x - ۳ = ۷ \Rightarrow ۴x^۲ + ۳x - ۱۰ = ۰$$

برای یافتن ریشهٔ دیگر معادله از روش کلی حل معادلهٔ درجه‌دوم استفاده می‌کنیم:

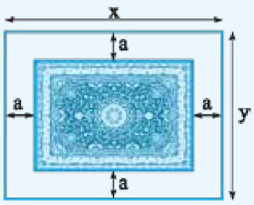
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(4)(-10)}}{2(4)}=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{8}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-3+13}{8}=\frac{5}{4}=1/25\\ x_2=\frac{-3-13}{8}=-2\end{cases}$$

گاهی وقت‌ها در حل یک مسئله به یک معادلهٔ درجه‌دوم می‌رسیم که باید با حل آن به جواب مسئله برسیم.

تست **فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل‌شکل، ثابت و یکسان است. اگر مساحت اتاق ۲۴ محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار اتاق چه‌قدر است؟**

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ **گزینهٔ ۲** شکل مسئله به صورت مقابل است:



با توجه به اندازه‌های روی شکل طول قالی $(x-2a)$ و عرض آن $(y-2a)$ است. مساحت اتاق برابر ۲۴ است، پس:

$$xy=24\quad(*)$$

محیط اتاق هم برابر ۲۰ است:

$$2(x+y)=20\Rightarrow x+y=10\Rightarrow y=10-x$$

با جای‌گذاری تساوی $y=10-x$ در $(*)$ طول و عرض اتاق را می‌یابیم:

$$x(10-x)=24\Rightarrow 10x-x^2=24\Rightarrow x^2-10x+24=0\Rightarrow(x-6)(x-4)=0\Rightarrow x=6,4$$

چون طول اتاق از عرض آن بیشتر است، پس طول اتاق برابر ۶ و عرض آن برابر ۴ است. حالا با توجه به این‌که محیط قالی برابر ۱۲ است، فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار اتاق یعنی a را می‌یابیم:

$$2((x-2a)+(y-2a))=12\xrightarrow{x=6,y=4}2(6-2a+4-2a)=12\Rightarrow 10-4a=6\Rightarrow 4a=4\Rightarrow a=1$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

در حالتی که معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه دارد، ریشه‌ها عبارت‌اند از:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

پس روابط بین ریشه‌ها که سه حالت اساسی دارد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

الف) **مجموع ریشه‌ها** که با حرف **S** نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$$

ب) **حاصل‌ضرب ریشه‌ها** که با حرف **P** نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=\alpha.\beta=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}\alpha.\beta=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

پ) **قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها** که با حرف **M** نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها}=|\alpha-\beta|=|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}|=|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}|=|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow\boxed{M=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

تست **در معادلهٔ $(k+1)x^2+kx=2k-1$، حاصل‌ضرب ریشه‌ها نصف حاصل‌جمع آن‌ها است. k کدام است؟**

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ **گزینهٔ ۴** ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{(k+1)}_{a}x^2\underbrace{+k}_{b}x\underbrace{-2k+1}_{c}=0$$

بنابراین:

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}=\frac{-2k+1}{k+1}\qquad\text{حاصل‌جمع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}=-\frac{k}{k+1}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها نصف حاصل‌جمع آن‌ها است بنابراین:

$$\frac{-2k+1}{k+1}=\frac{1}{2}(-\frac{k}{k+1})\xrightarrow{k+1\neq0}-2k+1=\frac{1}{2}(-k)\Rightarrow-4k+2=-k\Rightarrow 3k=2\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

در سایر مواردی که رابطهٔ بین ریشه‌ها را می‌خواهند، باید رابطه را به ترکیبی از P، S یا M تبدیل کنیم. در این موارد به حالت‌های زیر توجه کنید:

۱) در حالت‌های کسری معمولاً مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$$

۲) در حالت‌هایی که α و β توان‌های یکسان دارند، معمولاً از اتحادها استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$$

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS$$

هم‌چنین با فرض $\alpha>\beta$ داریم:

$$\alpha^۳-\beta^۳=(\alpha-\beta)(\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta)=\underbrace{(\alpha-\beta)}_{M}(S^۲-۲P+P)=M(S^۲-P)$$

دقت کنید اگر $\alpha<\beta$ باشد آن‌گاه:

$$\alpha^۳-\beta^۳=-M(S^۲-P)$$

۳) در حالت‌هایی که α و β رادیکال دارند، معمولاً از توان‌رسانی استفاده می‌کنیم تا رادیکال‌ها حذف شوند:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\ \Rightarrow\ A^۲=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=S+۲\sqrt{P}\ \Rightarrow\ A=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۴x+۱=۰$ باشند، حاصل مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ ب) $\alpha^۳+\beta^۳$ پ) $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|$ ت) $|\alpha^۲-\beta^۲|$

پاسخ در معادلهٔ $۲x^۲-۴x+۱=۰$ داریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۴}{۲}=۲ \\ P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲} \\ M=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۱۶-۴(۲)}}{۲}=\frac{\sqrt{۸}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲} \end{cases}$$

الف)

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{۲^۲-۲(\frac{۱}{۲})}{\frac{۱}{۲}}=۶$$

ب)

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS=۲^۳-۳(\frac{۱}{۲})(۲)=۵$$

پ) عبارت را برابر A قرار داده و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A=|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|\ \Rightarrow\ A^۲=\alpha+\beta-۲\sqrt{\alpha\beta}=S-۲\sqrt{P}=۲-۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}=۲-۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ \Rightarrow\ A=\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

ت)

$$|\alpha^۲-\beta^۲|=|\alpha-\beta||\alpha+\beta|=M\times S=\sqrt{۲}\times ۲=۲\sqrt{۲}$$

در حالتی که توان‌های α و β یکسان نیست، باید با کمک معادله توان‌های آن‌ها را یکسان کنیم و سپس رابطه را به ترکیبی از S، P و M تبدیل کنیم:

تست اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۶x+۳=۰$ باشند، حاصل $\alpha^۲(۲\beta-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ گزینهٔ ۴ توان‌های α و β یکسان نیست، بنابراین ابتدا باید توان‌ها را یکی کنیم. α ریشهٔ معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$\text{معادله}:\ ۲\alpha^۲-۶\alpha+۳=۰\ \Rightarrow\ ۲\alpha^۲=۶\alpha-۳\ \Rightarrow\ \alpha^۲=\frac{۶\alpha-۳}{۲}$$

پس در عبارت $\alpha^۲(۲\beta-۱)$ داریم:

$$\text{عبارت}=\frac{۶\alpha-۳}{۲}(۲\beta-۱)=\frac{۱۲\alpha\beta-۶\beta-۶\alpha+۳}{۲}=\frac{۱۲\alpha\beta-۶(\beta+\alpha)+۳}{۲}=\frac{۱۲P-۶S+۳}{۲}\quad(*)$$

حالا مقادیر S و P را از معادلهٔ $۲x^۲-۶x+۳=۰$ می‌یابیم:

$$۲x^۲-۶x+۳=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases} S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۶}{۲}=۳ \\ P=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۲} \end{cases}\ \xrightarrow{(*)}\ \text{عبارت}=\frac{۱۲(\frac{۳}{۲})-۶(۳)+۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

می‌توانید به صورت زیر هم عمل کنید:

ریشهٔ معادله است $\beta: 2\beta^2-6\beta+3=0 \Rightarrow 6\beta-3=2\beta^2 \xrightarrow{\div 3} 2\beta-1=\frac{2\beta^2}{3} \quad (**)$

حالا حاصل عبارت $\alpha^2(2\beta-1)$ را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{(**)} \text{عبارت}=\alpha^2\left(\frac{2\beta^2}{3}\right)=\frac{2\alpha^2\beta^2}{3}=\frac{2P^2}{3}\overset{P=\frac{3}{2}}{=\!=}\frac{2(\frac{3}{2})^2}{3}=\frac{2(\frac{9}{4})}{3}=\frac{3}{2}$$

حالا بعضی وقت‌ها هست که توان‌ها یکسانند ولی ضرایب نابرابرند. در این حالت مطابق تست زیر عمل کنید:

تست اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2x-2=0$ باشند که $x_1>x_2$، حاصل $3x_1^2+x_2^2$ کدام است؟

۱) $8+4\sqrt{3}$ ۲) $8-4\sqrt{3}$ ۳) $16+4\sqrt{3}$ ۴) $16-4\sqrt{3}$

پاسخ گزینه ۴ *وقتی ریشه‌ها توان یکسان دارن اما ضرایبشون با هم فرق داره باید این‌طوری بریم جلو!*

$$3x_1^2+x_2^2=\left(\frac{\text{جمع ضرایب}}{2}\right)(x_1^2+x_2^2)+\left(\frac{\text{تفاضل ضرایب}}{2}\right)(x_1^2-x_2^2) \Rightarrow 3x_1^2+x_2^2=\left(\frac{3+1}{2}\right)(x_1^2+x_2^2)+\left(\frac{3-1}{2}\right)(x_1^2-x_2^2)$$

$$\Rightarrow 3x_1^2+x_2^2=2(x_1^2+x_2^2)+(x_1^2-x_2^2)=2(x_1^2+x_2^2)+(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

$x_1>x_2$ است پس $x_1-x_2>0$، در نتیجه: $x_1-x_2=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$x_1^2+x_2^2$ که S^2-2P و x_1+x_2 هم که S است، پس: $\text{عبارت}=2(S^2-2P)+\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}(S)$

S، P، a و Δ باید از معادله محاسبه شود:

$$x^2+2x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} S=-2\,,\,P=-2 \\ a=1\,,\,\Delta=12 \end{cases} \Rightarrow \text{عبارت}=2((-2)^2-2(-2))+\frac{\sqrt{12}}{1}(-2)=2(4+4)+2\sqrt{3}(-2)=16-4\sqrt{3}$$

در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$:

۱ اگر $a+b+c=0$، آن‌گاه یک جواب معادله ۱ و جواب دیگر $\frac{c}{a}$ است.

۲ اگر $a+c=b$، آن‌گاه یک جواب معادله -1 و جواب دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

تست اگر $\alpha=1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $3x^2-ax-5=0$ باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

پاسخ گزینه ۴ **روش اول** چون یک جواب معادله $\alpha=1$ است، جواب دیگر $\frac{c}{a}$ است. پس: ریشهٔ دیگر $=\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}$

روش دوم $\alpha=1$ یک جواب معادله است. از طرفی: حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow (1)\beta=\frac{-5}{3} \Rightarrow \beta=-\frac{5}{3}$

تست اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{2}x^2+(\sqrt{2}-1)x=1$ باشند، حاصل $\frac{x_1^2}{x_1^2+1}+\frac{x_2^2}{x_2^2+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ گزینه ۲ اول معادله را مرتب می‌کنیم: $\underbrace{\sqrt{2}}_{a}x^2+\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{b}x\underbrace{-1}_{c}=0$

با توجه به معادله، $a+c=b$ است، پس یک ریشهٔ معادله برابر -1 و ریشهٔ دیگر برابر $-\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+1}+\frac{x_2^2}{x_2^2+1}=\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

بعضی وقت‌ها رابطهٔ داده‌شده فقط برحسب یکی از ریشه‌ها است. در این حالت باید با کمک جمع ریشه‌ها یا ضرب ریشه‌ها، رابطهٔ داده‌شده را برحسب دو ریشه بنویسیم و سپس آن را برحسب S، P، M نوشته و حاصل را محاسبه کنیم.

تست **اگر α ریشهٔ معادلهٔ $۲x^۲ + x = ۲$ باشد، حاصل $\alpha^۳ - \frac{۱}{\alpha^۳}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۸}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۸}$

پاسخ **گزینهٔ ۴** رابطهٔ خواسته‌شده فقط برحسب یکی از ریشه‌هاست پس نمی‌توانیم آن را برحسب S و P بنویسیم. در این حالت از جمع یا ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$\text{معادله}: ۲x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \beta = -\frac{۱}{۲} - \alpha \\ P = \alpha\beta = -۱ \Rightarrow \beta = -\frac{۱}{\alpha} \end{cases}$$

اگر خوب دقت کنید متوجه میشید که رابطهٔ ضرب ریشه‌ها یک جورایی! با $\alpha^۳ - \frac{۱}{\alpha^۳}$ رابطه داره نگاه کن!

$$\beta = -\frac{۱}{\alpha} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} \beta^۳ = -\frac{۱}{\alpha^۳} \Rightarrow \frac{۱}{\alpha^۳} = -\beta^۳$$

حالا این رابطه را در $\alpha^۳ - \frac{۱}{\alpha^۳}$ جای‌گذاری می‌کنیم و حاصل را می‌یابیم:

$$\alpha^۳ - \frac{۱}{\alpha^۳} = \alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS = (-\frac{۱}{۲})^۳ - ۳(-۱)(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۸} - \frac{۳}{۲} = \frac{-۱-۱۲}{۸} = -\frac{۱۳}{۸}$$

در برخی سؤالات هم دیده شده که مقدار رابطه بین ریشه‌ها را می‌دهند و در عوض از ما می‌خواهند یکی از ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم را که مجهول است محاسبه کنیم. این مسائل در دو تیپ قابل بررسی هستند.

تست **به ازای کدام مجموعه مقادیر m مجموع معکوس مربعات ریشه‌های $x^۲ + (۳m+۱)x + m + ۱ = ۰$ برابر ۳ است؟**

۱) ۱ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ و $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\varnothing$

پاسخ **گزینهٔ ۱** مجموع معکوس مربعات ریشه‌ها برابر ۳ است؛ یعنی:

$$\frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\beta^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{S^۲ - ۲P}{P^۲} = ۳ \quad (*)$$

با توجه به معادلهٔ $x^۲ + (۳m+۱)x + m + ۱ = ۰$ داریم:

$$S = -(۳m+۱) \,,\, P = m + ۱$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{(-(۳m+۱))^۲ - ۲(m+۱)}{(m+۱)^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{۹m^۲ + ۶m + ۱ - ۲m - ۲}{m^۲ + ۲m + ۱} = ۳ \Rightarrow ۹m^۲ + ۴m - ۱ = ۳m^۲ + ۶m + ۳$$

$$\Rightarrow ۶m^۲ - ۲m - ۴ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۳m^۲ - m - ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{جمع ضرایب}=۰} \begin{cases} m = ۱ \\ m = \frac{c}{a} = -\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

اما به ازای $m = -\frac{۲}{۳}$ معادله به صورت $x^۲ - x + \frac{۱}{۳} = ۰$ تبدیل می‌شود و با توجه به این‌که دلتای این معادله منفی است، بنابراین معادله ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت. در نتیجه تنها $m = ۱$ قابل قبول است.

تست **به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۵x + m = ۰$ از دو برابر ریشهٔ دیگر ۷ واحد بیشتر است؟**

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۸ ۴) -۱۲

پاسخ **گزینهٔ ۴** یکی از ریشه‌ها (α) از دو برابر دیگری (β)، ۷ واحد بیشتر است، پس:

$$\alpha = ۲\beta + ۷ \quad (*)$$

این رابطه بر حسب S و P قابل نوشتن نیست. در این جور مواقع به معادله رجوع می‌کنیم. با توجه به معادله، مقدار مجموع ریشه‌ها را داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۵}{۲} \xrightarrow{(*)} ۲\beta + ۷ + \beta = \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۳\beta = -\frac{۹}{۲} \Rightarrow \beta = -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{(*)} \alpha = ۲(-\frac{۳}{۲}) + ۷ = ۴$$

حالا با توجه به معادله برای محاسبهٔ مقدار m از حاصل‌ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$P = \alpha\beta = \frac{m}{۲} \Rightarrow (۴)(-\frac{۳}{۲}) = \frac{m}{۲} \Rightarrow m = -۱۲$$

تعیین علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

در حالتی که $\Delta > ۰$، معادلهٔ درجه‌دوم دو ریشه دارد. می‌توانیم بدون محاسبهٔ ریشه‌ها در مورد علامت آن‌ها بحث کنیم:

$\Delta > ۰ \Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد $\Rightarrow$

- $\frac{c}{a} > ۰$: دو ریشه با علامت‌های یکسان دارد $\Rightarrow$
  - $\frac{-b}{a} > ۰$: دو ریشهٔ مثبت
  - $\frac{-b}{a} < ۰$: دو ریشهٔ منفی
- $\frac{c}{a} < ۰$: دو ریشه با علامت‌های مخالف دارد $\Rightarrow$
  - $-\frac{b}{a} > ۰$: ریشهٔ مثبت $>$ |ریشهٔ منفی|
  - $-\frac{b}{a} < ۰$: ریشهٔ مثبت $<$ |ریشهٔ منفی|

در حالتی که $\Delta = ۰$ است، معادله یک ریشهٔ مضاعف به صورت $x = -\frac{b}{۲a}$ دارد.

مثال در مورد علامت جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲ + ۴x - \sqrt{۲} = ۰$ نظر دهید.

پاسخ اول باید Δ محاسبه شود:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶ + ۴(\sqrt{۲})(۳) > ۰$$

پس معادله دو ریشه دارد. از طرفی:

$$\frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{۲}}{۳} < ۰$$

پس معادله دو ریشه با علامت‌های مخالف دارد. همچنین:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{۴}{۳} < ۰$$

در نتیجه ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی کوچک‌تر است.

وقتی $\frac{c}{a} < ۰$ (یا $ac < ۰$) به طور قطع $\Delta > ۰$ است.

تعیین نوع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

برای تعیین نوع ریشه‌ها می‌توانید از جدول زیر کمک بگیرید:

شرایط Δ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$	نوع ریشه(ها)
$\Delta = ۰$ و $-\frac{b}{a} > ۰$	یک ریشهٔ مضاعف مثبت
$\Delta = ۰$ و $-\frac{b}{a} < ۰$	یک ریشهٔ مضاعف منفی
(چون جمع ریشه‌ها صفر است) $b = ۰$ و $\Delta > ۰$ (یا $ac < ۰$)	دو ریشهٔ قرینهٔ هم (α و $-\alpha$)
(چون ضرب ریشه‌ها یک است) $a = c$ و $\Delta > ۰$	دو ریشهٔ معکوس هم (α و $\frac{۱}{\alpha}$)

تست به ازای کدام مقدار m معادلهٔ $۲x^۲ - x + m - ۱ = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی معکوس هم دارد؟

۱) ۳ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) هیچ مقدار m

پاسخ گزینهٔ ۴ طبق جدول باید دو شرط $\Delta > ۰$ و $a = c$ برقرار باشد:

$$a = c \Rightarrow m - ۱ = ۲ \Rightarrow m = ۳$$

با قراردادن $m = ۳$ در معادله، معادله به صورت $۲x^۲ - x + ۲ = ۰$ خواهد شد. چون دلتای معادله منفی است، پس $m = ۳$ قابل‌قبول نیست. در نتیجه هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

معادلات درجه‌سوم با یک عامل $(x - a)$

تا این‌جا در مورد حل معادلات درجه‌دوم مفصل حرف زدیم. حالا می‌خواهیم *یک کوچولو!* در مورد حل معادلات درجه‌سوم هم بحث کنیم. قبل از شروع بحث اول به نکتهٔ زیر توجه کنید:

اگر $x = a$ یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ یک عامل $(x - a)$ دارد و $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

به عنوان مثال $x=1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^3-3x+2=0$ است. پس x^3-3x+2 یک عامل $(x-1)$ دارد. پس با تقسیم x^3-3x+2 بر $x-1$ آن را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-(x^3-x^2)} & x^2+x-2 \\ \quad x^2-3x & \\ \underline{-(x^2-x)} & \\ \quad -2x+2 & \\ \underline{-(-2x+2)} & \\ \qquad 0 & \end{array} \Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$$

حالا اگر قرار باشد سایر ریشه‌های معادله را هم بیابیم باید ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-2=0$ را محاسبه کنیم:

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=-2$$

بنابراین معادله $x^3-3x+2=0$ دارای دو ریشهٔ ۱ و ۲− است.

تست **اگر $x=2$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^3+ax+2=0$ باشد، کوچک‌ترین ریشهٔ معادله کدام است؟**

۱) $-2-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}-1$ ۳) $-1-\sqrt{2}$ ۴) $2-\sqrt{2}$

پاسخ گزینهٔ ۳ چون ۲ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$(2)^3+a(2)+2=0 \Rightarrow a=-5 \Rightarrow \text{معادله}: x^3-5x+2=0$$

چون $x=2$ یک جواب معادله است، پس عبارت $P(x)=x^3-5x+2$ یک عامل $x-2$ دارد. پس با تقسیم $P(x)$ بر $x-2$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{-(x^3-2x^2)} & x^2+2x-1 \\ \quad 2x^2-5x & \\ \underline{-(2x^2-4x)} & \\ \quad -x+2 & \\ \underline{-(-x+2)} & \\ \qquad 0 & \end{array} \Rightarrow x^3-5x+2=(x-2)(x^2+2x-1) \xrightarrow{P(x)=0} (x-2)(x^2+2x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x_1=2 \\ x^2+2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2} \end{cases}$$

پس جواب‌های دیگر معادله برابرند با:

$$x=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-1+\sqrt{2} \\ x_3=-1-\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین $x_3=-1-\sqrt{2}$ کوچک‌ترین ریشهٔ معادله است.

در معادلهٔ درجه‌سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$:

۱) اگر $a+b+c+d=0$، آن‌گاه یک ریشه ۱ است. پس عبارت درجه سوم یک عامل $x-1$ دارد.

۲) اگر $a+c=b+d$، آن‌گاه یک ریشه ۱− است. پس عبارت درجه سوم یک عامل $x+1$ دارد.

۳) معمولاً یکی از ریشه‌های معادله ۱ یا ۱− یا ۲ یا ۲− است، که با امتحان صدق‌کردن آن‌ها در معادله می‌توانید آن را بیابید.

۴) اگر معادله سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد آن‌گاه مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{d}{a}$ است.

تست **معادلهٔ $x^3-2x^2-5x-2=0$ چند ریشه دارد؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۳

$$\underbrace{\overbrace{1x^3-2x^2}^{}}_{}\ldots \quad 1x^3-2x^2-5x-2=0 \xrightarrow{a+c=b+d} \text{یک ریشهٔ معادله ۱− است.}$$

(جمع $=-4$ ، جمع $=-4$)

برای محاسبهٔ سایر ریشه‌ها عبارت x^3-2x^2-5x-2 را بر $x+1$ تقسیم می‌کنیم که پس از تقسیم داریم:

$$x^3-2x^2-5x-2=(x+1)(x^2-3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

بنابراین معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

نوشتن معادلهٔ درجه‌دوم با داشتن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها

فرض کنید ریشه‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم α و β باشد، در این صورت معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$\text{معادله}: (x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

از آن‌جا که $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$ پس این معادله به صورت مقابل قابل نوشتن است:

$$\text{معادله}: x^2-Sx+P=0$$

معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن به ترتیب برابر S و P است به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد.

تست اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + ax + b = 0$ برابر $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ و $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $1/5$ ۳) $-2/5$ ۴) $2/5$

پاسخ گزینهٔ ۳ طبق نکتهٔ بالا معادله‌ای که ریشه‌های آن $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ و $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ است برابر است با:

$$\begin{cases}\alpha = \frac{3-\sqrt{7}}{2}\\ \beta = \frac{3+\sqrt{7}}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}S = \alpha+\beta = \frac{6}{2} = 3\\ P = \alpha\beta = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \text{معادله}: x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a+b = -3+\frac{1}{2} = -2/5$$

تست محیط مستطیلی ۲۲ متر و مساحت آن ۲۴ متر مربع است. طول مستطیل چه‌قدر از عرض آن بیشتر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ ۴ اگر طول مستطیل را x_1 و عرض آن را x_2 در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\text{محیط مستطیل} = 22 \Rightarrow 2(x_1+x_2) = 22 \Rightarrow x_1+x_2 = 11$$

$$\text{مساحت مستطیل} = 24 \Rightarrow x_1x_2 = 24$$

برای محاسبهٔ x_1 و x_2 با توجه به تساوی‌های بالا می‌توانیم یک معادلهٔ درجه‌دوم با ریشه‌های x_1 و x_2 در نظر بگیریم. در این صورت:

$$\begin{cases}S = x_1+x_2 = 11\\ P = x_1x_2 = 24\end{cases} \xrightarrow{x^2-Sx+P=0} \text{معادله}: x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 3, 8$$

پس طول مستطیل برابر ۸ و عرض آن برابر ۳ است پس طول مستطیل ۵ واحد بیشتر از عرض آن است.

تشکیل معادلهٔ درجه دوم جدید

گاهی وقتا یه معادله میدن بعد میگن یه معادله‌ای بنویسید که با ریشه‌های معادلهٔ اولیه رابطهٔ خاصی! داشته باشه. برای این کار با یک مثال صفر تا صدشو بررسی می‌کنیم.

فرض کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 6x + 3 = 0$ باشند و بخواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌های آن به صورت $\frac{2}{\beta}$ و $\frac{2}{\alpha}$ باشند.

یک روش این است که مجموع (S') و حاصل‌ضرب (P') ریشه‌های معادلهٔ جدید را بیابیم و سپس با توجه به رابطهٔ $x^2 - Sx + P = 0$ معادله را بنویسیم:

$$(*) \quad \begin{cases}S' = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\beta+2\alpha}{\alpha\beta} = \frac{2(\beta+\alpha)}{\alpha\beta}\\ P' = (\frac{2}{\alpha})(\frac{2}{\beta}) = \frac{4}{\alpha\beta}\end{cases}$$

α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 6x + 3 = 0$ هستند، پس:

$$x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta = 6\\ \alpha\beta = 3\end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases}S' = \frac{2(6)}{3} = 4\\ P' = \frac{4}{3}\end{cases}$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را داریم. پس معادلهٔ جدید برابر است با:

$$\text{معادله}: x^2 - 4x + \frac{4}{3} = 0 \xrightarrow{(\times 3)} 3x^2 - 12x + 4 = 0$$

یک روش هم این است که ریشهٔ معادلهٔ اولیه را x و ریشهٔ معادلهٔ جدید را X در نظر بگیریم. با توجه به رابطهٔ بین ریشه‌ها داریم:

$$X = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{X}$$

با جای‌گذاری این تساوی در معادلهٔ داده‌شده یعنی $x^2 - 6x + 3 = 0$، معادلهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

معادلهٔ جدید: $$(\frac{2}{X})^2 - 6(\frac{2}{X}) + 3 = 0 \Rightarrow \frac{4}{X^2} - \frac{12}{X} + 3 = 0 \xrightarrow{(\times X^2)} 4 - 12X + 3X^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 4 = 0$$

تست اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + ax + b = 0$، از مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 5x + 2 = 0$ یک واحد بیشتر باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ گزینهٔ ۳ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۲=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم، پس: $S=\alpha+\beta=۵\ ,\ P=\alpha\beta=۲$

چون ریشه‌های معادلهٔ جدید از مکعب ریشه‌های معادله $x^۲-۵x+۲=۰$ یک واحد بیشتر است، پس این ریشه‌ها را به صورت $\alpha^۳+۱$ و $\beta^۳+۱$ در نظر می‌گیریم. مجموع و حاصل‌ضرب این ریشه‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} S'=(\alpha^۳+۱)+(\beta^۳+۱)=\alpha^۳+\beta^۳+۲=S^۳-۳PS+۲=۵^۳-۳(۲)(۵)+۲=۹۷ \\ P'=(\alpha^۳+۱)(\beta^۳+۱)=\underbrace{\alpha^۳\beta^۳}+\underbrace{\alpha^۳+\beta^۳}+۱=P^۳+S^۳-۳PS+۱=۲^۳+۵^۳-۳(۲)(۵)+۱=۱۰۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: x^۲\underbrace{-۹۷}_{a}x+\underbrace{۱۰۴}_{b}=۰ \Rightarrow a+b=۷$$

حل معادله با تغییر متغیر

معادلاتی هم هستند که با کمک تغییر متغیر مناسب، به یک معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌شوند.

برای حل این نوع معادلات، اول از یک تغییر متغیر مناسب استفاده می‌کنیم و معادلهٔ درجه‌دوم حاصل را حل می‌کنیم، بعد متغیر اولیه را برمی‌گردانیم و جواب‌های معادلهٔ اصلی را پیدا می‌کنیم.

تست معادلهٔ $(x^۲-۱)^۲-(x^۲-۱)-۱۲=۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ با تغییر متغیر $x^۲-۱=t$ معادله را به یک معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌کنیم:

$$\text{معادله}: t^۲-t-۱۲=۰ \Rightarrow (t-۴)(t+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۴ \xrightarrow{x^۲-۱=t} x^۲-۱=۴ \\ t=-۳ \xrightarrow{x^۲-۱=t} x^۲-۱=-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲=۵ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۵} \\ x^۲-۱=-۳ \Rightarrow x^۲=-۲\ (\text{جواب‌ندارد}) \end{cases}$$

مثال تعداد و علامت جواب‌های معادلهٔ $x^۴-۶x^۲-۲=۰$ را (بدون یافتن جواب‌ها) بیابید.

پاسخ از تغییر متغیر $x^۲=t$ استفاده می‌کنیم: $t^۲-۶t-۲=۰$:معادلهٔ جدید

در معادلهٔ جدید، $\Delta>۰$ و $\frac{c}{a}<۰$ است، پس معادله دو ریشه با علامت‌های مخالف دارد. یعنی برای مثال دو ریشهٔ $t_۱>۰$ و $t_۲<۰$.

در نتیجه:

$$\begin{cases} x^۲=t_۱ \Rightarrow x=\pm\sqrt{t_۱} \\ x^۲=t_۲\ \ \text{جواب ندارد (}t_۲\text{ منفی است و }x^۲\text{ هیچ‌وقت منفی نمی‌شود)} \end{cases}$$

پس معادله دو جواب قرینهٔ هم دارد.

تست به ازای کدام مقادیر m معادلهٔ $mx^۴-(۲m-۱)x^۲+m+۱=۰$ چهار ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) $(-\frac{۱}{۲},۰)$ ۲) $(-\infty,-\frac{۱}{۲})$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

پاسخ گزینهٔ ۴ با فرض $x^۲=t$ داریم: $\text{معادله}: mt^۲-(۲m-۱)t+m+۱=۰ \quad (*)$

برای این‌که معادلهٔ اصلی چهار ریشهٔ حقیقی داشته باشد، باید معادلهٔ $(*)$ دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. (فرض کنید ریشه‌ها $t_۱,t_۲>۰$ باشند در این صورت ریشه‌های معادلهٔ اصلی $x=\pm\sqrt{t_۱}$ و $x=\pm\sqrt{t_۲}$ هستند.) برای این‌که معادلهٔ $(*)$ دو ریشهٔ مثبت داشته باشد باید:

$$\begin{cases} \Delta>۰ \Rightarrow (-(۲m-۱))^۲-۴(m)(m+۱)>۰ \Rightarrow ۴m^۲-۴m+۱-۴m^۲-۴m>۰ \Rightarrow ۸m<۱ \Rightarrow m<\frac{۱}{۸} \quad (۱) \\ \frac{c}{a}>۰ \Rightarrow \frac{m+۱}{m}>۰ \Rightarrow m>۰ \text{ یا } m<-۱ \quad (۲) \\ -\frac{b}{a}>۰ \Rightarrow -\frac{-(۲m-۱)}{m}>۰ \Rightarrow \frac{۲m-۱}{m}>۰ \Rightarrow m<۰ \text{ یا } m>\frac{۱}{۲} \quad (۳) \end{cases}$$

از اشتراک سه جواب (۱)، (۲) و (۳) داریم: $\text{حدود } m=(-\infty,-۱)$

روش هندسی حل معادلات

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودار این دو منحنی، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس.
یعنی هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
بنابراین به طور کلی برای حل یک معادله به روش هندسی، باید معادله را به دو تابع در طرفین تساوی طوری تبدیل کنیم که رسم نمودار هر تابع ممکن باشد. سپس دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی (جواب‌های معادله) را می‌یابیم.

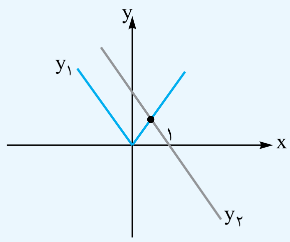
تست معادلهٔ $x+|x|=1$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ ۲ از روش رسم استفاده می‌کنیم. فقط چون رسم نمودار تابع $y=x+|x|$ (تابع سمت چپ تساوی) در حال حاضر آسان نیست،
معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم: $x+|x|=1 \Rightarrow \underbrace{|x|}_{y_1}=\underbrace{1-x}_{y_2}$

هر یک از نمودارهای y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_2=1-x \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \\ y_1=|x| \end{cases} \Rightarrow$$



دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند پس معادله یک جواب دارد.

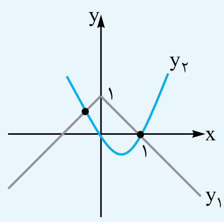
تست معادلهٔ $x^2-x=1-|x|$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ ۳ $\underbrace{1-|x|}_{y_1}=\underbrace{x^2-x}_{y_2}$

برای رسم y_1، نمودار $y=|x|$ را نسبت به محور xها قرینه و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. برای رسم y_2 هم، از مقداردهی استفاده می‌کنیم:

$$y_2=x^2-x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{array} \Rightarrow$$



دو نمودار، یکدیگر را در دو نقطه قطع کرده‌اند، پس معادله دو جواب دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

رابطه بین ریشه‌ها

۷۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجه‌دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟ *(ریاضی ۹۸)*

۱) $-2<m<2.5$ ۲) $-2<m<3.5$ ۳) $-1<m<3.5$ ۴) $-1<m<2.5$

۷۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x-2=0$ باشند، حاصل $\alpha+\beta+\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) صفر

۷۹- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $3x^2-2x=6$ باشند، حاصل $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۸۰- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+3=0$ باشند، آن‌گاه حاصل $|\alpha-\beta|$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۳

۸۱- معادلهٔ درجه‌دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ *(تجربی ۹۹)*

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) $-\frac{5}{2}$

۸۲- مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-6=0$ کدام است؟

۱) $\frac{33}{4}$ ۲) $\frac{33}{2}$ ۳) $\frac{11}{4}$ ۴) $\frac{11}{2}$

۸۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x-3=0$ باشند، حاصل $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{13}{2}$ ۲) $-\frac{11}{2}$ ۳) $-\frac{37}{6}$ ۴) $-\frac{35}{6}$

۸۴- مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-2=0$ کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۵ ۳) ۴۷ ۴) ۴۹

۸۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ چه‌قدر است؟ (ریاضی خارج ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}=x$ باشند، حاصل $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۸۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ باشند، آن‌گاه ریشهٔ سوم $\alpha^4+\beta^4$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+2=0$ باشند، حاصل $(\alpha+\frac{1}{\alpha})^2+(\beta+\frac{1}{\beta})^2$ کدام است؟

۱) ۳۸ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۳۶

۸۹- در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-2x-4=0$، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ چه‌قدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۹۰- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{(2\alpha+\frac{1}{\alpha})^2}{\beta^2-2\beta}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) -32 ۳) ۱۶ ۴) -16

۹۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2x-4=0$ باشند، حاصل $\frac{\beta}{(\beta+2)^2}+\frac{\alpha}{(\alpha+2)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

۹۲- در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-(\frac{1}{a^4}+a^2)x+\frac{1}{a^2}=0$، حاصل $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $a^8+\frac{1}{a^8}$ ۲) $a^2+\frac{1}{a^2}$ ۳) $a^4+\frac{1}{a^4}$ ۴) $a^6+\frac{1}{a^6}$

۹۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+2=0$ باشند $(\alpha<\beta)$ حاصل $\frac{\alpha^4-4}{\alpha^2}$ کدام است؟

۱) $-24\sqrt{2}$ ۲) $24\sqrt{2}$ ۳) $-12\sqrt{7}$ ۴) $12\sqrt{7}$

۹۴- در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۹۵- در معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$ یک ریشه از سه برابر ریشهٔ دیگر، سه واحد بیشتر است. m کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۹۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3mx+4=0$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطهٔ $\alpha\beta^2+4=0$ برقرار است؟

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۹۷- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^2-2ax+k=0$ از مجذور ریشهٔ دیگر ۴ واحد کم‌تر باشد، بزرگ‌ترین ریشهٔ معادله کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۸- به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادلهٔ $x(x-m)=m^2+1$ رابطهٔ $||\alpha|-|\beta||=4$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) -4 ۳) ۸ ۴) -6

۹۹- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+mx-۳=۰$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطهٔ $۲\alpha+\beta=۴$ بین ریشه‌ها برقرار است؟

۱) $۳\pm\sqrt{۱۰}$ ۲) $\frac{۶\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۳) $-۳\pm\sqrt{۱۰}$ ۴) $\frac{-۶\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$

۱۰۰- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲+۳x+m^۲=۲$، معکوس یکدیگرند؟ *(تجربی خارج ۹۰)*

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۱- اگر α و β دو ریشهٔ قرینهٔ هم معادلهٔ $(m-۳)x^۲+(m^۲-۱)x-m=۰$ باشند، حاصل $۲\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۰۲- به ازای کدام مقدار m، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۶x+۵+m=۰$، مجذور دیگری است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲ ۳) -۳۲ ۴) -۳

۱۰۳- اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲۹۰x+m^۲=۰$ مجذور دو عدد طبیعی فرد متوالی باشد، $\sqrt{m+۱}$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۰۴- به ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ معادلهٔ $(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰$ است؟ *(ریاضی ۸۴)*

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۰۵- به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-۵x+m^۲-۳=۰$ است؟ *(ریاضی خارج ۸۴)*

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۰۶- به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$، برابر ۶ می‌باشد؟ *(تجربی ۹۳)*

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$ و -۱

۱۰۷- به ازای چه حدودی از m، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲+m(x+۲)=۲$ از قدرمطلق ریشهٔ منفی کوچک‌تر است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $(۰,۱)$

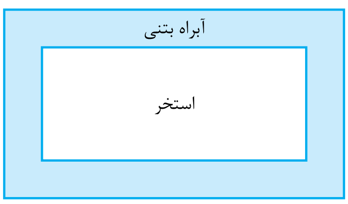
۱۰۸- مجموع دو عدد، $\frac{۵}{۶}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{۱}{۶}$ است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۰۹- محیط یک مستطیل ۲۰ و مساحت آن ۲۴ است. طول مستطیل چه‌قدر از عرض آن بیشتر است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۰- یک استخر مستطیل‌شکل به ابعاد ۳ و ۱۰ متر دارای یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه بتونی در همه‌جا دارای پهنای یکسان و مساحت ۳۰ متر مربع باشد، پهنای آبراه بتونی چه‌قدر است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

معادلات درجه‌سوم با یک عامل (x-a)

۱۱۱- در معادلهٔ $(x+۲)(x^۲-x+m)=۰$ حاصل‌ضرب سه ریشه ۶ است. m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۴

۱۱۲- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x(ax^۲-x-۵)=۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است؟ *(ریاضی خارج ۸۷)*

۱) -۲ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۱۳- اگر مجموع مجذور ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۳+(x^۲-x)(x+۱-m)=۰$ برابر ۴ باشد، m کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۱۴- مجموع معکوس مربع سه ریشهٔ معادلهٔ $(x+۲)(x^۲+ax+۲)=۰$ برابر $-\frac{a}{۲}$ است. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۶

۱۱۵- ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۳-۲x+۱=۰$ چگونه است؟ *(ریاضی ۸۳)*

۱) ریشهٔ مضاعف مثبت ـ یک ریشهٔ منفی
۲) ریشهٔ مضاعف منفی ـ یک ریشهٔ مثبت
۳) یک ریشهٔ مثبت ـ دو ریشهٔ منفی
۴) دو ریشهٔ مثبت ـ یک ریشهٔ منفی

۱۱۶- اگر α، β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۵x+۴=۰$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}+\frac{۱}{\gamma^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۹}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۱۱۷- به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x=۴$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $a<-۴$ ۲) $a>-۴$ ۳) $a<۴$ ۴) $a>۴$

تشکیل معادلهٔ درجه‌دوم جدید

۱۱۸- ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^۲+ax+b=۰$، یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ بیشتر است. b کدام است؟ (تجربی ۸۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۱۹- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۴=۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\{\frac{۱}{\alpha}+۱,\frac{۱}{\beta}+۱\}$ است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $۴x^۲-۵x+۱=۰$ ۲) $۴x^۲-۳x+۱=۰$ ۳) $۴x^۲-۵x-۱=۰$ ۴) $۴x^۲-۳x-۱=۰$

۱۲۰- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x=۱$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $۸x^۲+kx-۱=۰$ به صورت $\{\alpha^۲\beta,\alpha\beta^۲\}$ است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۲۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(۵x+۳)=۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب معادلهٔ $۴x^۲-kx+۲۵=۰$ به صورت $\{\frac{۱}{\alpha^۲},\frac{۱}{\beta^۲}\}$ است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۱۲۲- اگر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+ax+b=۰$ جذر ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۷۳x+۱۴۴=۰$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۲۳ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۲۳}{۲}$

۱۲۳- اگر ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+m=۰$ از k برابر مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$، ۲ واحد کم‌تر باشد، m کدام است؟

۱) -۴۱ ۲) -۳۹ ۳) -۴۴ ۴) -۴۳

حل معادله با تغییر متغیر

۱۲۴- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^۶-۹x^۳+۸=۰$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۱

۱۲۵- معادلهٔ $x^۴-۲x^۲+۱=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۶- مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۲

۱۲۷- معادلهٔ $(x^۲-۲x)^۲-(x^۲-۲x)=۲$ چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۸- جواب‌های معادلهٔ $(x^۲-۱)^۲=x^۲+۵$ چگونه‌اند؟

۱) دو جواب مثبت و دو جواب منفی ۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی

۳) دو جواب مثبت ۴) معادله جواب ندارد.

۱۲۹- معادلهٔ $(x^۴-x^۲)^۲-۵(x^۴-x^۲)-۶=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۰- کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $(x-۱)^۴+۲x=x^۲+۳$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $۱-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

۱۳۱- اگر معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (تجربی ۸۵)

۱) $m<-۴$ ۲) $m>۴$ ۳) $-۴<m<۴$ ۴) $۴<m<۹$

۱۳۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ $\frac{۱}{۴}x^۴+mx^۲+m^۲-۱=۰$ فقط دارای دو جواب حقیقی متمایز است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $\mathbb{R}-[-۱,۱]$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۳۳- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۴-mx^۲-m^۲=۱$ چهار واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر است. ریشهٔ بزرگ‌تر معادله کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۲

۷۷- گزینهٔ ۳ برای این‌که معادله دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، باید $\Delta > ۰$ باشد:

$$\Rightarrow ۳۶ - ۴(۲m-۱)(m-۲) > ۰$$

$$\xrightarrow{+(-۴)} (۲m-۱)(m-۲) - ۹ < ۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۴m - m + ۲ - ۹ < ۰ \Rightarrow ۲m^۲ - ۵m - ۷ < ۰$$

در معادلهٔ $۲m^۲ - ۵m - ۷ = ۰$، $a + c = b$ است. در نتیجه یکی از ریشه‌ها -۱ و ریشهٔ دیگر $-\frac{c}{a} = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$ است. در نتیجه:

$$۲m^۲ - ۵m - ۷ < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۳/۵$$

باید توجه داشت که به ازای $m = \frac{۱}{۲}$ با یک معادلهٔ درجهٔ اول روبه‌رو هستیم که تنها یک ریشه دارد. پس قابل قبول نیست، اما با توجه به گزینه‌ها به طور قطع، $\boxed{۳}$ گزینهٔ موردنظر طراح است.

۷۸- گزینهٔ ۱

$$x^۲ - ۴x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-۴}{(۱)} = ۴ \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۲}{۱} = -۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \alpha\beta = ۴ + (-۲) = ۲$$

۷۹- گزینهٔ ۲

$$۳x^۲ - ۲x = ۶ \Rightarrow ۳x^۲ - ۲x - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-۲}{۳} = \frac{۲}{۳} \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۶}{۳} = -۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{۲}{۳}}{-۲} = -\frac{۱}{۳}$$

۸۰- گزینهٔ ۱ در درس‌نامه گفتیم:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$x^۲ - ۶x + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۳۶ - ۱۲ = ۲۴, a = ۱$$

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۲۴}}{۱} = ۲\sqrt{۶}$$

۸۱- گزینهٔ ۱ مجموع مربعات ریشه‌ها $= \alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P$

S و P را از معادله پیدا می‌کنیم:

$$۲x^۲ + ۳x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{۳}{۲} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{-۶}{۲} = -۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = (-\frac{۳}{۲})^۲ - ۲(-۳) = \frac{۹}{۴} + ۶ = \frac{۹ + ۲۴}{۴} = \frac{۳۳}{۴}$$

۸۲- گزینهٔ ۱

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \text{معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{۱}{\frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^۲ = -bc \Rightarrow a^۲ + bc = ۰$$

با توجه به معادله داریم:

$$۳^۲ + (۲m-۱)(۲-m) = ۰ \Rightarrow ۹ + ۴m - ۲m^۲ + m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow -۲m^۲ + ۵m + ۷ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -۱ \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{۷}{۲} \end{cases}$$

اما به ازای $m = -۱$ معادله به صورت $۳x^۲ + x + ۱ = ۰$ خواهد بود که دلتای آن منفی است و ریشهٔ حقیقی ندارد. پس $m = \frac{۷}{۲}$ قابل قبول است.

۸۳- گزینهٔ ۴

$$۲x^۲ - ۵x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{۵}{۲} \\ P = \alpha\beta = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

برای محاسبهٔ حاصل عبارت داده‌شده مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\beta\alpha} = \frac{S^۲ - ۲P}{P} = \frac{(\frac{۵}{۲})^۲ - ۲(-\frac{۳}{۲})}{-\frac{۳}{۲}}$$

$$= \frac{\frac{۲۵}{۴} + ۳}{-\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۳۷}{۴}}{-\frac{۳}{۲}} = -\frac{۳۷}{۶}$$

۸۴- گزینهٔ ۲

$$\text{مجموع مکعبات ریشه‌ها} = \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= S^۳ - ۳PS \quad (*)$$

از معادله، S و P را محاسبه می‌کنیم:

$$x^۲ - ۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-۳}{۱} = ۳ \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۲}{۱} = -۲ \end{cases}$$

پس:

$$\xrightarrow{(*)} \text{مجموع مکعبات ریشه‌ها} = (۳)^۳ - ۳(-۲)(۳)$$

$$= ۲۷ + ۱۸ = ۴۵$$

۸۵- گزینهٔ ۲ چون رادیکالی است، به توان دو می‌رسانیم:

$$A = \frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow A^۲ = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + \frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

در دو کسر اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$$A^{۲} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} + \frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{S}{P} + \frac{۲}{\sqrt{P}} \qquad (*)$$

S و P را از معادلهٔ داده‌شده حساب می‌کنیم:

$$۴x^{۲} - ۱۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{-۱۲}{۴} = ۳ \\ P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

همینا رو تو رابطهٔ (*) قرار میدیم:

$$A^{۲} = \frac{۳}{\frac{۱}{۴}} + \frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}} = ۱۲ + \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۱۶ \Rightarrow A = ۴$$

۸۶- گزینهٔ ۳ باید معادله را مرتب کنیم:

$$x^{۲} - \sqrt{۲}x + \sqrt{۲} - x = ۰ \Rightarrow x^{۲} - (\sqrt{۲}+۱)x + \sqrt{۲} = ۰$$

مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه، ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}$ است:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۱ \\ \beta = \frac{\sqrt{۲}}{۱} = \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{\alpha^{۲}} + \frac{۱}{\beta^{۲}} = \frac{۱}{(۱)^{۲}} + \frac{۱}{(\sqrt{۲})^{۲}} = ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

۸۷- گزینهٔ ۲

$$x^{۲} - ۵x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = ۵ \\ P = \alpha\beta = ۳ \end{cases}$$

برای محاسبهٔ $\alpha^{۴} + \beta^{۴}$ از اتحاد فرعی اتحاد اول استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^{۴} + \beta^{۴} = (\alpha^{۲} + \beta^{۲})^{۲} - ۲\alpha^{۲}\beta^{۲} = (S^{۲} - ۲P)^{۲} - ۲P^{۲}$$

$$= (۵^{۲} - ۲(۳))^{۲} - ۲(۳)^{۲} = ۱۹^{۲} - ۱۸ = ۳۶۱ - ۱۸ = ۳۴۳$$

$$\Rightarrow \alpha^{۴} + \beta^{۴} \text{ ریشهٔ سوم } = \sqrt[۳]{۳۴۳} = \sqrt[۳]{۷^{۳}} = ۷$$

۸۸- گزینهٔ ۳

$$x^{۲} - ۶x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = ۶ \\ P = \alpha\beta = ۲ \end{cases} \qquad (*)$$

حالا حاصل عبارت داده‌شده را می‌یابیم:

$$(\alpha + \frac{۱}{\alpha})^{۲} + (\beta + \frac{۱}{\beta})^{۲} = \alpha^{۲} + \frac{۱}{\alpha^{۲}} + ۲ + \beta^{۲} + \frac{۱}{\beta^{۲}} + ۲$$

$$= (\alpha^{۲} + \beta^{۲}) + (\frac{۱}{\alpha^{۲}} + \frac{۱}{\beta^{۲}}) + ۴ = (\alpha^{۲} + \beta^{۲}) + (\frac{\alpha^{۲} + \beta^{۲}}{\alpha^{۲}\beta^{۲}}) + ۴$$

$$= (S^{۲} - ۲P) + \frac{S^{۲} - ۲P}{P^{۲}} + ۴$$

$$\overset{(*)}{=} (۳۶ - ۴) + \frac{۳۶ - ۴}{۴} + ۴ = ۳۲ + ۸ + ۴ = ۴۴$$

۸۹- گزینهٔ ۱ α ریشهٔ معادله است، پس آن را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\alpha^{۲} - ۲\alpha - ۴ = ۰ \Rightarrow \alpha^{۲} - ۴ = ۲\alpha \qquad (*)$$

آهان! خوب شد. پس عبارتمون این شکلی می‌شه:

$$(\alpha^{۲} - ۴)^{۲} + ۴\beta^{۲} \overset{(*)}{=} (۲\alpha)^{۲} + ۴\beta^{۲} = ۴\alpha^{۲} + ۴\beta^{۲}$$

$$= ۴(\alpha^{۲} + \beta^{۲}) = ۴(S^{۲} - ۲P)$$

S و P هم که از معادلهٔ داده‌شده حساب می‌شود:

$$x^{۲} - ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{-۲}{۱} = ۲ \\ P = \frac{-۴}{۱} = -۴ \end{cases}$$

پس:

$$(\alpha^{۲} - ۴)^{۲} + ۴\beta^{۲} = ۴(S^{۲} - ۲P) = ۴(۲^{۲} - ۲(-۴))$$

$$= ۴(۴ + ۸) = ۴۸$$

۹۰- گزینهٔ ۲ α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha : ۲\alpha^{۲} - ۴\alpha + ۱ = ۰ \text{ ریشه است } \xrightarrow{\div\alpha} ۲\alpha - ۴ + \frac{۱}{\alpha} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\alpha + \frac{۱}{\alpha} = ۴ \Rightarrow (۲\alpha + \frac{۱}{\alpha})^{۲} = (۴)^{۲} = ۱۶$$

$$\beta : ۲\beta^{۲} - ۴\beta + ۱ = ۰ \text{ ریشه است } \Rightarrow ۲\beta^{۲} - ۴\beta = -۱$$

$$\Rightarrow ۲(\beta^{۲} - ۲\beta) = -۱ \Rightarrow \beta^{۲} - ۲\beta = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{(۲\alpha + \frac{۱}{\alpha})^{۲}}{\beta^{۲} - ۲\beta} = \frac{۱۶}{-\frac{۱}{۲}} = -۳۲$$

۹۱- گزینهٔ ۴ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} + ۲x - ۴ = ۰$ هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha : \alpha^{۲} + ۲\alpha - ۴ = ۰ \text{ ریشه است } \Rightarrow \alpha(\alpha + ۲) = ۴$$

$$\Rightarrow \alpha + ۲ = \frac{۴}{\alpha}$$

$$\beta : \beta^{۲} + ۲\beta - ۴ = ۰ \text{ ریشه است } \Rightarrow \beta(\beta + ۲) = ۴$$

$$\Rightarrow \beta + ۲ = \frac{۴}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{(\alpha+۲)^{۲}} + \frac{\beta}{(\beta+۲)^{۲}} = \frac{\alpha}{(\frac{۴}{\alpha})^{۲}} + \frac{\beta}{(\frac{۴}{\beta})^{۲}}$$

$$= \frac{\alpha}{\frac{۱۶}{\alpha^{۲}}} + \frac{\beta}{\frac{۱۶}{\beta^{۲}}} = \frac{\alpha^{۳} + \beta^{۳}}{۱۶} = \frac{S^{۳} - ۳PS}{۱۶}$$

با توجه به معادلهٔ $x^{۲} + ۲x - ۴ = ۰$، $S = -۲$ و $P = -۴$ است، در نتیجه:

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{(-۲)^{۳} - ۳(-۴)(-۲)}{۱۶} = \frac{-۸ - ۲۴}{۱۶} = -۲$$

۹۲- گزینهٔ ۴ *خیلی سؤال بیفود ولی در عین حال ابتکاری و قشنگیه! ببین چی‌کار می‌کنم:*

$$x^{۲} - (\frac{۱}{a^{۴}} + a^{۲})x + \frac{۱}{a^{۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها} : x_۱ + x_۲ = \frac{۱}{a^{۴}} + a^{۲} \\ \text{ضرب ریشه‌ها} : x_۱x_۲ = \frac{۱}{a^{۲}} \end{cases}$$

اگر $x_۱ = \frac{۱}{a^{۴}}$ و $x_۲ = a^{۲}$ در نظر گرفته شود، تساوی‌های بالا برقرار می‌شوند. حالا حاصل عبارت خواسته‌شده را می‌یابیم:

$$\frac{x_۱}{x_۲} + \frac{x_۲}{x_۱} = \frac{\frac{۱}{a^{۴}}}{a^{۲}} + \frac{a^{۲}}{\frac{۱}{a^{۴}}} = \frac{۱}{a^{۶}} + a^{۶}$$

۹۳- گزینهٔ ۳ رابطهٔ داده‌شده فقط برحسب α است. از جمع یا ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم تا رابطه را برحسب α و β بنویسیم.

$$P = ۲ \Rightarrow \alpha\beta = ۲ \Rightarrow \beta = \frac{۲}{\alpha} \Rightarrow \beta^{۲} = \frac{۴}{\alpha^{۲}} \qquad (*)$$

از طرفی در عبارت داده‌شده داریم:

$$\frac{\alpha^۴-۴}{\alpha^۲}=\alpha^۲-\frac{۴}{\alpha^۲}\overset{(*)}{=}\alpha^۲-\beta^۲=(\alpha-\beta)\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}\quad(**)$$

همچنین با توجه به این‌که $\alpha<\beta$ است پس $\alpha-\beta<۰$ و در نتیجه:

$$\alpha-\beta=-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

پس: $$\xrightarrow{(**)}\alpha^۲-\beta^۲=(-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|})(S)$$

حالا با توجه به معادلهٔ $x^۲-۶x+۲=۰$ حاصل را می‌یابیم:

$$\alpha^۲-\beta^۲=(-\frac{\sqrt{۳۶-۸}}{|۱|})(۶)=(-۲\sqrt{۷})۶=-۱۲\sqrt{۷}$$

۹۴- گزینهٔ ریشه‌ها را α و β در نظر می‌گیریم. یک ریشه (α) از نصف ریشهٔ دیگر (β)، ۵ واحد بیشتر است:

$$\alpha=\frac{\beta}{۲}+۵\quad(*)$$

با توجه به معادله، جمع ریشه‌ها را داریم:

$$x^۲-۸x+m=۰\Rightarrow\alpha+\beta=۸$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{\beta}{۲}+۵+\beta=۸\Rightarrow\frac{۳\beta}{۲}=۳\Rightarrow\beta=۲$$

$\beta=۲$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\Rightarrow ۲^۲-۸(۲)+m=۰\Rightarrow m=۱۲$$

۹۵- گزینهٔ ریشه‌ها را α و β در نظر می‌گیریم: یک ریشه (α) از سه برابر ریشهٔ دیگر (β) سه واحد بیشتر است:

$$\alpha=۳\beta+۳\quad(*)$$

جمع ریشه‌ها را داریم: $$۳x^۲-۱۷x+m=۰\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۱۷}{۳}$$

$$\xrightarrow{(*)}۳\beta+۳+\beta=\frac{۱۷}{۳}\Rightarrow ۴\beta=\frac{۱۷}{۳}-۳=\frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow\beta=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{(*)}\alpha=۳\beta+۳=۳(\frac{۲}{۳})+۳=۵$$

$\alpha=۵$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$۳(۵)^۲-۱۷(۵)+m=۰\Rightarrow m=۱۰$$

می‌توانستید همان $\beta=\frac{۲}{۳}$ را در معادله قرار دهید، اما چون کسری بود کمی محاسباتش سخت می‌شد.

۹۶- گزینهٔ با توجه به معادله داریم:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow\alpha\beta=۴$$

با توجه به رابطهٔ $\alpha\beta^۲+۴=۰$ داریم:

$$(\alpha\beta)(\beta)+۴=۰\xrightarrow{\alpha\beta=۴}۴\beta+۴=۰\Rightarrow\beta=-۱$$

$\beta=-۱$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$(-۱)^۲-۳m(-۱)+۴=۰\Rightarrow ۱+۳m+۴=۰\Rightarrow m=-\frac{۵}{۳}$$

۹۷- گزینهٔ یکی از ریشه‌ها (α) از مجذور ریشهٔ دیگر (β) ۴ واحد کم‌تر است؛ یعنی:

$$\alpha=\beta^۲-۴\quad(*)$$

از طرفی با توجه به معادله:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۲a}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=۲\xrightarrow{(*)}\beta^۲-۴+\beta=۲$$

$$\Rightarrow\beta^۲+\beta-۶=۰\Rightarrow(\beta-۲)(\beta+۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta=۲\xrightarrow{(*)}\alpha=۰\\ \beta=-۳\xrightarrow{(*)}\alpha=۵\end{cases}$$

۹۸- گزینهٔ اول معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x(x-m)=m^۲+۱\Rightarrow x^۲-mx-m^۲-۱=۰$$

با توجه به معادله حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}=-m^۲-۱$ است و با توجه به این‌که $-m^۲-۱<۰$ پس $\frac{c}{a}<۰$ است. در نتیجه یکی از ریشه‌ها مثبت و ریشهٔ دیگر منفی است. فرض کنیم $\alpha>۰$ و $\beta<۰$ است، بنابراین:

$$\big||\underbrace{\alpha}_{+}|-|\underbrace{\beta}_{-}|\big|=۴\Rightarrow|\alpha-(-\beta)|=۴\Rightarrow|\alpha+\beta|=۴$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به معادله}}|m|=۴\Rightarrow m=\pm۴$$

با توجه به گزینه‌ها $m=-۴$ قابل قبول است.

۹۹- گزینهٔ

$$x^۲+mx-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-m\\ P=\alpha\beta=-۳\end{cases}$$

رابطهٔ بین ریشه‌ها به صورت $۲\alpha+\beta=۴$ است، پس:

$$\alpha+\underbrace{\alpha+\beta}_{S}=۴\Rightarrow\alpha-m=۴\Rightarrow\alpha=m+۴$$

α ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x^۲+mx-۳=۰\xrightarrow{\alpha=m+۴}(m+۴)^۲+m(m+۴)-۳=۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۸m+۱۶+m^۲+۴m-۳=۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲+۱۲m+۱۳=۰\Rightarrow m=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۱۴۴-۴(۲)(۱۳)}}{۲(۲)}$$

$$=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۴۰}}{۴}=\frac{-۱۲\pm۲\sqrt{۱۰}}{۴}=\frac{-۶\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$$

دقت کنید که چون $\frac{c}{a}<۰$ است، پس معادله حتماً دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۰۰- گزینهٔ برای این‌که ریشه‌های معادله معکوس هم باشند، باید $a=c$ و $\Delta>۰$ باشد؛ پس اول a را برابر c قرار می‌دهیم. mها را پیدا می‌کنیم. بعد بررسی می‌کنیم به ازای کدام مقدار m، $\Delta>۰$ است. فقط قبلش باید معادله را مرتب کنیم:

$$mx^۲+۳x+m^۲=۲\Rightarrow mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰\quad(*)$$

$$a=c\Rightarrow m=m^۲-۲\Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\end{cases}$$

در معادلهٔ $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}-x^۲+۳x-۱=۰\Rightarrow\Delta>۰\Rightarrow m=-۱\ \text{قابل‌قبول است.}\\ ۲x^۲+۳x+۲=۰\Rightarrow\Delta<۰\ (\text{غیرقابل‌قبول})\end{cases}$$

۱۰۱- گزینهٔ برای این‌که معادله دو ریشهٔ قرینه داشته باشد باید b (ضریب x) برابر صفر باشد (شرط $\Delta>۰$ یا داشتن دو ریشه بررسی شود):

$$m^۲-۱=۰\Rightarrow m=\pm۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=۱:-۲x^۲-۱=۰\ \text{ریشه ندارد.}\\ m=-۱:-۴x^۲+۱=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\\ \Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۲},\beta=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

بنابراین: $۲\alpha^۲+\beta^۲=۲(\frac{۱}{۲})^۲+(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$

۱۰۲- گزینهٔ ۳ یکی از ریشه‌ها (α)، مجذور دیگری (β) است.

$$\alpha=\beta^۲ \quad (*)$$

با توجه به معادله، مقدار $\alpha+\beta$ را داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha+\beta=۶ \xrightarrow{(*)} \beta^۲+\beta=۶$$

$$\Rightarrow \beta^۲+\beta-۶=۰ \Rightarrow (\beta+۳)(\beta-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=-۳ \xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{\text{در معادله}} (-۳)^۲-۶(-۳)+۵+m=۰ \\ \Rightarrow ۹+۱۸+۵+m=۰ \Rightarrow m=-۳۲ \\ \beta=۲ \xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{\text{در معادله}} ۲^۲-۶(۲)+۵+m=۰ \\ \Rightarrow ۴-۱۲+۵+m=۰ \Rightarrow m=۳ \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، $m=-۳۲$ است.

۱۰۳- گزینهٔ ۳ اگر k را عددی زوج و طبیعی فرض کنیم، ریشه‌های معادله را به صورت $(k-۱)^۲$ و $(k+۱)^۲$ می‌توان در نظر گرفت. با توجه به معادله، مجموع ریشه‌های معادله برابر ۲۹۰ است. پس:

$$(k+۱)^۲+(k-۱)^۲=۲۹۰ \Rightarrow ۲(k^۲+۱)=۲۹۰$$

$$\Rightarrow k^۲+۱=۱۴۵ \Rightarrow k^۲=۱۴۴ \Rightarrow k=\pm ۱۲$$

$$\xrightarrow{k\ \text{طبیعی}} k=۱۲ \Rightarrow \text{ریشه‌ها}=۱۱^۲\ \text{و}\ ۱۳^۲$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=۱۱^۲\times ۱۳^۲ \Rightarrow m^۲=(۱۱\times ۱۳)^۲$$

$$\Rightarrow m=۱۱\times ۱۳=۱۴۳ \Rightarrow \sqrt{m+۱}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

۱۰۴- گزینهٔ ۴ ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم:

واسطهٔ حسابی دو ریشه است. $\frac{۱}{۸}:\frac{۱}{۸}=\frac{\alpha+\beta}{۲} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱}{۴}$

با توجه به معادله:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{m^۲-۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۳}{m^۲-۴}$$

$$\Rightarrow m^۲-۴=۱۲ \Rightarrow m^۲=۱۶ \Rightarrow m=\pm ۴$$

باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، Δ مثبت است (در معادلهٔ $(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰$ قرار می‌دهیم.):

در معادله $m=۴: ۱۲x^۲-۳x+۴=۰$

$\xrightarrow{\Delta<۰}$ معادله ریشه ندارد $\Rightarrow$ $m=۴$ قابل قبول نیست.

پس $m=-۴$ است.

اگر k واسطهٔ حسابی دو عدد b و a باشد، آن‌گاه $k=\frac{a+b}{۲}$ است.

۱۰۵- گزینهٔ ۲ طبق معمول ریشه‌ها را α و β در نظر می‌گیریم:

واسطهٔ هندسی ریشه‌ها است $\sqrt{۲}:(\sqrt{۲})^۲=\alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta=۲$

با توجه به معادله، $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m^۲-۳}{m}$. در نتیجه:

$$\frac{m^۲-۳}{m}=۲ \Rightarrow m^۲-۳=۲m \Rightarrow m^۲-۲m-۳=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-۱ \\ m=۳ \end{cases}$$

طبق معمول باید چک کنیم به ازای کدام مقدار m، $\Delta>۰$ است:

در معادله $m=-۱: -x^۲-۵x-۲=۰$

پس $m=-۱$ قابل قبوله $\xrightarrow{\Delta>۰}$

اگر k واسطهٔ هندسی b و a باشد، آن‌گاه $k^۲=ab$.

۱۰۶- گزینهٔ ۱

مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۶ است. $\alpha^۲+\beta^۲=۶$:

$$\Rightarrow S^۲-۲P=۶ \quad (*)$$

مقادیر S و P را از معادلهٔ داده‌شده محاسبه می‌کنیم:

$$mx^۲-(m+۳)x+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها}: S=\frac{m+۳}{m} \\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\frac{۵}{m} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} (\frac{m+۳}{m})^۲-۲(\frac{۵}{m})=۶ \Rightarrow \frac{(m+۳)^۲}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}=۶$$

$$\xrightarrow{\times m^۲} (m+۳)^۲-۱۰m=۶m^۲$$

$$\Rightarrow m^۲+۶m+۹-۱۰m=۶m^۲$$

$$\Rightarrow m^۲-۴m+۹=۶m^۲ \Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰$$

جمع ضرایب صفر است، پس: $m=۱ , m=-\frac{۹}{۵}$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد یعنی دلتای آن مثبت است. از مقدار راحت‌تر! شروع می‌کنیم:

در معادله $m=۱: x^۲-۴x+۵=۰$

$\xrightarrow{\Delta<۰}$ معادله ریشه ندارد. $\Rightarrow$ $m=۱$ قابل‌قبول نیست.

پس با توجه به گزینه‌ها $m=-\frac{۹}{۵}$ قابل‌قبول است.

۱۰۷- گزینهٔ ۴ چون معادله یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است یعنی $\frac{c}{a}<۰$؛ وقتی هم $\frac{c}{a}$ منفی باشد قطعاً $\Delta>۰$ است. از طرفی، ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی کوچک‌تر است (یعنی مثلاً ریشهٔ مثبت، ۲ و ریشهٔ منفی، ۳- است که $|-۳|>۲$ شده) پس جمع ریشه‌ها منفی است، یعنی $-\frac{b}{a}<۰$. اگر همین دوتا شرط را چک کنیم *فواستهٔ مسئله اجرایی می‌شه!* فقط اول معادله را مرتب کنیم:

$$x^۲+m(x+۲)=۲ \Rightarrow x^۲+mx+۲m-۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}<۰ \Rightarrow \frac{۲m-۲}{۱}<۰ \Rightarrow ۲m<۲ \Rightarrow m<۱ \\ -\frac{b}{a}<۰ \Rightarrow -\frac{m}{۱}<۰ \Rightarrow m>۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰<m<۱$$

۱۰۸- گزینهٔ ۲ **روش اول** دو عدد را x و y در نظر می‌گیریم:

مجموع دو عدد $\frac{۵}{۶}$ است. $x+y=\frac{۵}{۶} \Rightarrow y=\frac{۵}{۶}-x \quad (*)$:

حاصل‌ضرب دو عدد $\frac{۱}{۶}$ است. $xy=\frac{۱}{۶}$:

$$\xrightarrow{(*)} x(\frac{۵}{۶}-x)=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۶}x-x^۲=\frac{۱}{۶} \xrightarrow{\times(-۶)} ۶x^۲-۵x=-۱$$

$$\Rightarrow ۶x^۲-۵x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۴(۶)(۱)}}{۲(۶)}=\frac{۵\pm۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵+۱}{۱۲}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(*)} y=\frac{۱}{۳} \\ x=\frac{۵-۱}{۱۲}=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{(*)} y=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس عدد بزرگ‌تر $\frac{۱}{۲}$ است.

روش دوم مجموع جواب‌ها $\frac{۵}{۶}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{۱}{۶}$ است، پس معادله به صورت زیر است:

$$\text{معادله}: x^۲-\frac{۵}{۶}x+\frac{۱}{۶}=۰ \xrightarrow{\times۶} ۶x^۲-۵x+۱=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۵\pm\sqrt{۱}}{۱۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \text{ یا } \frac{۱}{۳}$$

۱۰۹- گزینهٔ ۲ طول مستطیل را با α و عرض آن را با β نشان می‌دهیم.

پس: $\text{محیط}=۲۰ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۲۰ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۰=S$

$\text{مساحت}=۲۴ \Rightarrow \alpha\beta=۲۴=P$

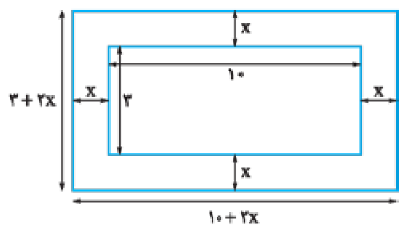
پس معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{معادله}: x^۲-۱۰x+۲۴=۰ \Rightarrow (x-۶)(x-۴)=۰$$

$$\Rightarrow x_۱=۶\,,\, x_۲=۴$$

چون طول مستطیل بزرگ‌تر از عرض آن است، بنابراین $\alpha=۶$ و در نتیجه با توجه به تساوی $\alpha+\beta=۱۰$، $\beta=۴$ است. پس طول مستطیل ۲ واحد از عرض آن بیشتر است.

۱۱۰- گزینهٔ ۱ اگر پهنای آبراه را x در نظر بگیریم، اندازه‌های روی شکل به صورت مقابل می‌شود:



مساحت آبراه برابر تفاضل مساحت مستطیل کوچک‌تر از مستطیل بزرگ‌تر است:

$$\text{مساحت آبراه}=(۱۰+۲x)(۳+۲x)-(۳)(۱۰)$$

$$=۴x^۲+۲۶x+۳۰-۳۰=۴x^۲+۲۶x$$

مساحت آبراه ۳۰ است، پس داریم:

$$۴x^۲+۲۶x=۳۰ \Rightarrow ۴x^۲+۲۶x-۳۰=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب}=۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{-۳۰}{۴} \quad \times \end{cases}$$

پس پهنای آبراه برابر ۱ متر است.

۱۱۱- گزینهٔ ۳

$$(x+۲)(x^۲-x+m)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x^۲-x+m=۰ \quad (\text{ریشه‌ها را } \alpha \text{ و } \beta \text{ درنظر می‌گیریم.}) \end{cases}$$

حاصل‌ضرب سه ریشه برابر ۶ است:

$$(-۲)(\alpha)(\beta)=۶ \Rightarrow \alpha\beta=-۳ \quad (*)$$

$\alpha\beta$ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x+m=۰$ است، پس $\alpha\beta=\frac{c}{a}=m$ است در نتیجه:

$$\alpha\beta=m \xrightarrow{(*)} -۳=m$$

۱۱۲- گزینهٔ ۲ یکی از ریشه‌های معادله ۲ است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\Rightarrow ۲(a(۲)^۲-۲-۵)=۲ \Rightarrow ۴a-۷=۱ \Rightarrow ۴a=۸ \Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: x(۲x^۲-x-۵)=۲ \Rightarrow ۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰$$

چون $x=۲$ ریشه است، پس عبارت $۲x^۳-x^۲-۵x-۲$ یک عامل $x-۲$ دارد. در نتیجه با تقسیم عبارت بر $x-۲$ عامل‌های دیگر را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳-x^۲-۵x-۲ & x-۲ \\ \cline{2-2} \underline{-(۲x^۳-۴x^۲)} & ۲x^۲+۳x+۱ \\ \quad ۳x^۲-۵x & \\ \quad \underline{-(۳x^۲-۶x)} & \\ \qquad\quad x-۲ & \\ \qquad\quad \underline{-(x-۲)} & \\ \qquad\qquad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow ۲x^۳-x^۲-۵x-۲=(x-۲)(۲x^۲+۳x+۱)$$

ریشه‌های دیگر از حل معادلهٔ $۲x^۲+۳x+۱=۰$ به دست می‌آیند.

پس مجموع دو ریشهٔ دیگر برابر $-\frac{b}{a}=-\frac{۳}{۲}$ است.

در معادلهٔ درجه سوم $ax^۳+bx^۲+cx+d=۰$، اگر معادله سه ریشه داشته باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=-\frac{b}{a} \\ (x_۱)(x_۲)(x_۳)=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

پس در معادلهٔ $۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰$، مجموع سه ریشه برابر است با:

$$x_۱+x_۲+x_۳=-\frac{-۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[x_۱=۲]{\text{یک ریشه ۲ است.}} ۲+x_۲+x_۳=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x_۲+x_۳=-\frac{۳}{۲}$$

پس مجموع دو ریشهٔ دیگر $-\frac{۳}{۲}$ است.

۱۱۳- گزینهٔ ۱ در معادله از یک x فاکتور می‌گیریم تا به فرم ساده‌تری تبدیل شود:

$$x^۳+(x^۲-x)(x+۱-m)=۰$$

$$\Rightarrow x(x^۲+(x-۱)(x+۱-m))=۰$$

$$\Rightarrow x(x^۲+(x^۲-۱-mx+m))=۰$$

$$\Rightarrow x(۲x^۲-mx+m-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ ۲x^۲-mx+m-۱=۰ \quad (*) \end{cases}$$

فرض کنیم ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-mx+m-۱=۰$، α و β باشد. با توجه به این‌که مجذور ریشه‌ها برابر ۴ است، پس:

$$۰^۲+\alpha^۲+\beta^۲=۴ \Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲=۴ \Rightarrow S^۲-۲P=۴ \quad (**)$$

با توجه به معادلهٔ $۲x^۲-mx+m-۱=۰$، $S=\frac{m}{۲}$ و $P=\frac{m-۱}{۲}$ است، بنابراین:

$$\xrightarrow{(**)} \frac{m^۲}{۴}-۲(\frac{m-۱}{۲})=۴ \Rightarrow \frac{m^۲}{۴}-m+۱=۴$$

$$\xrightarrow{\times۴} m^۲-۴m+۴=۱۶ \Rightarrow m^۲-۴m-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (m-۶)(m+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=6 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ }(*)} 2x^2-6x+5=0 \\ \xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشهٔ حقیقی ندارد} \\ m=-2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ }(*)} 2x^2+2x-3=0 \\ \xrightarrow{\Delta>0} \text{قابل قبول} \end{cases}$$

پس $m=-2$ قابل قبول است.

۱۱۴- گزینهٔ ۲

$$(x+2)(x^2+ax+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x^2+ax+2=0 \ (\text{ریشه‌ها را } \alpha \text{ و } \beta \text{ درنظر می‌گیریم.}) \end{cases}$$

مجموع معکوس مربعات ریشه‌ها برابر $-\frac{a}{2}$ است. پس با توجه به این‌که ریشه‌ها، -2، α و β هستند داریم:

$$\frac{1}{(-2)^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=-\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{4}+\frac{S^2-2P}{P^2}=-\frac{a}{2} \qquad (*)$$

S و P را از معادلهٔ $x^2+ax+2=0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} S=-a \\ P=2 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{4}+\frac{(-a)^2-2(2)}{2^2}=-\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+a^2-4}{4}=-\frac{a}{2}$$

طرفین معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم: $a^2-3=-2a$

$$a^2+2a-3=0 \Rightarrow (a-1)(a+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-3 \end{cases}$$

اما به ازای $a=1$ معادلهٔ $x^2+ax+2=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. (*دلتاش منفی می‌شه.*) پس $a=-3$.

۱۱۵- گزینهٔ ۴ **روش اول** مجموع ضرایب معادله صفر است؛ پس یک ریشهٔ معادله یک است. در نتیجه عبارت x^3-2x+1 یک عامل $x-1$ دارد. پس عبارت را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم و عامل‌های دیگر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-(x^3-x^2)} & x^2+x-1 \\ \quad x^2-2x & \\ \quad \underline{-(x^2-x)} & \\ \qquad -x+1 & \\ \qquad \underline{-(-x+1)} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \ (\text{یک ریشهٔ مثبت}) \\ x^2+x-1=0 \xrightarrow{\frac{c}{a}=-1<0} \\ \text{یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد} \end{cases}$$

پس در مجموع، معادله دو ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد.
دقت کنید، چون $x=1$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2+x-1=0$ نیست، پس طبق نکتهٔ زیر، معادله ریشهٔ مضاعف ندارد.

معادلهٔ $(x-a)^2=0$ ریشهٔ مضاعف دارد.
معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ زمانی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta=0$.

روش دوم برای تجزیهٔ عبارت x^3-2x+1 می‌توانید این‌طوری هم عمل کنید:

$$x^3-2x+1=0 \Rightarrow x^3-x-x+1=0$$

$$\Rightarrow (x^3-x)-(x-1)=0 \Rightarrow x(x^2-1)-(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1)-(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$

۱۱۶- گزینهٔ ۳ با توجه به معادله، $x=1$ یک ریشهٔ معادله است (چون در معادله صدق می‌کند.) بنابراین عبارت x^3-5x+4 یک عامل $(x-1)$ دارد. با تقسیم x^3-5x+4 بر $x-1$ خواهیم داشت:

$$x^3-5x+4=(x-1)(x^2+x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+x-4=0 \end{cases}$$

فرض کنیم $\alpha=1$ باشد پس ریشه‌های β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-4=0$ هستند. در نتیجه: $S=\beta+\gamma=-1,\ P=\beta\gamma=-4$

حالا حاصل عبارت $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$ را می‌یابیم:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{\gamma^2+\beta^2}{\beta^2\gamma^2}=1+\frac{S^2-2P}{P^2}$$

$$=1+\frac{(-1)^2-2(-4)}{(-4)^2}=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$$

۱۱۷- گزینهٔ ۱ معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$$

مجموع ضرایب معادله صفر است $(1+a-1+4-a-4=0)$.
پس یک ریشهٔ معادله $x=1$ است. با تقسیم عبارت $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4$ بر $x-1$ سایر عامل‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-(x^3-x^2)} & x^2+ax+4 \\ \quad ax^2+(4-a)x & \\ \quad \underline{-(ax^2-ax)} & \\ \qquad 4x-4 & \\ \qquad \underline{-(4x-4)} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

با توجه به تقسیم، تجزیهٔ معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

معادله: $(x-1)(x^2+ax+4)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \ (\text{یک ریشهٔ مثبت}) \\ x^2+ax+4=0 \end{cases}$$

برای این‌که معادله، سه ریشهٔ مثبت داشته باشد باید ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+4=0$ هم مثبت باشد. پس باید سه شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow a^2-16>0 \Rightarrow a^2>16 \Rightarrow a>4 \text{ یا } a<-4 \\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{4}{1}>0 \ \text{همواره برقرار} \\ -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{a}{1}>0 \Rightarrow a<0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a<-4$$

اما یه اشکال کوچولو دارد این تست! اگر $a=-۵$ باشد معادله به صورت زیر می‌شود:

$$(x-۱)(x^۲-۵x+۴)=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۱)(x-۴)=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۱,۴$$

که در این حالت معادله دوتا ریشه دارد نه سه‌تا. پس جواب دقیق‌تر این سؤال به صورت مقابل است: حدود a: $a<-۴ , a\neq -۵$

۱۱۸- گزینهٔ ۲ **روش اول** معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ را معادلهٔ اولیه و ریشه‌هایش را α و β در نظر می‌گیریم.

ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ بیشتر است. پس ریشه‌های معادلهٔ جدید به صورت $\alpha+۱$ و $\beta+۱$ هستند. برای محاسبهٔ b، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را باید محاسبه کنیم (حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید، b است.):

$$P'=(\alpha+۱)(\beta+۱) \Rightarrow \frac{b}{۱}=\alpha\beta+\alpha+\beta+۱ \quad (*)$$

$\alpha\beta$ و $\alpha+\beta$، حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ هستند؛ پس:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{۷}{۳}\\ \alpha\beta=\frac{۱}{۳}\end{cases} \xrightarrow{(*)} b=\frac{۱}{۳}-\frac{۷}{۳}+۱=-۱$$

روش دوم ریشهٔ معادلهٔ اولیه را با x و ریشهٔ معادلهٔ جدید را با X نمایش می‌دهیم. با توجه به رابطهٔ بین ریشه‌ها داریم:

$$X=x+۱ \Rightarrow x=X-۱$$

با جای‌گذاری این تساوی در معادلهٔ اولیه، معادلهٔ جدید را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{۳x^۲+۷x+۱=۰} ۳(X-۱)^۲+۷(X-۱)+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳(X^۲-۲X+۱)+۷X-۷+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳X^۲-۶X+۳+۷X-۷+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳X^۲+X-۳=۰ \xrightarrow{\div ۳} X^۲+\frac{۱}{۳}X-۱=۰$$

پس: $b=-۱$.

۱۱۹- گزینهٔ ۳ اول دقت کنید که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$۲x^۲-۳x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=-\frac{۴}{۲}=-۲\end{cases} \quad (*)$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

$$S'=\frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲$$

$$\xrightarrow{(*)} S'=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=-\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P'=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱$$

$$=\frac{۱}{\alpha\beta}+(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})+۱ \xrightarrow{(*)} P'=\frac{۱}{-۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱$$

$$\Rightarrow P'=-\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}+۱=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه معادلهٔ جدید به صورت زیر است:

$$\xrightarrow{x^۲-S'x+P'=۰} x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

۱۲۰- گزینهٔ ۲ برای محاسبهٔ مقدار k به مجموع ریشه‌های معادلهٔ جدید توجه می‌کنیم (در معادلهٔ جدید مجموع ریشه‌ها $-\frac{k}{۸}$ است):

$$S'=\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲ \Rightarrow \frac{-k}{۸}=\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad (*)$$

$$۲x^۲-۳x=۱ \Rightarrow ۲x^۲-۳x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} -\frac{k}{۸}=\frac{۳}{۲}(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow -\frac{k}{۸}=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow k=۶$$

۱۲۱- گزینهٔ ۳ **روش اول** مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x(۵x+۳)=۲ \Rightarrow ۵x^۲+۳x-۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{۳}{۵}\\ P=\alpha\beta=-\frac{۲}{۵}\end{cases}$$

برای محاسبهٔ k از مجموع ریشه‌های معادلهٔ جدید استفاده می‌کنیم:

$$S'=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲} \Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲} \Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{S^۲-۲P}{P^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{(-\frac{۳}{۵})^۲-۲(-\frac{۲}{۵})}{(-\frac{۲}{۵})^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{\frac{۹}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{\frac{۹+۲۰}{۲۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۹}{۴} \Rightarrow k=۲۹$$

روش دوم به معادلهٔ اولیه نگاه کنید:

$$x(۵x+۳)=۲ \Rightarrow ۵x^۲+۳x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}\alpha=-۱\\ \beta=-\frac{c}{a}=\frac{۲}{۵}\end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ جدید به صورت $\{\frac{۱}{(-۱)^۲}=۱ , \frac{۱}{(\frac{۲}{۵})^۲}=\frac{۲۵}{۴}\}$ هستند. در نتیجه $x=۱$ در معادله صدق می‌کند:

$$۴(۱)^۲-k(۱)+۲۵=۰ \Rightarrow k=۲۹$$

۱۲۲- گزینهٔ ۳ اگر ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۷۳x+۱۴۴=۰$ را α و β در نظر بگیریم (پس $P=\frac{۱۴۴}{۴}=۳۶$ و $S=\frac{۷۳}{۴}$)، ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+ax+b=۰$ به صورت $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ خواهد بود. بنابراین داریم:

▷ $P'=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \Rightarrow \frac{b}{۲}=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{P}=\sqrt{۳۶}=۶ \Rightarrow b=۱۲$

▷ $S'=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \Rightarrow -\frac{a}{۲}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

طرف راست یک عبارت همواره مثبت است، پس باید طرف چپ نیز مثبت باشد. در نتیجه $a > ۰$. با این شرط، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{a^۲}{۴} = \alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta} = S+۲\sqrt{P} \Rightarrow \frac{a^۲}{۴} = \frac{۷۳}{۴}+۲(۶) = \frac{۱۲۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a = -۱۱$$

بنابراین: $a+b = -۱۱+۱۲ = ۱$

۱۲۳- گزینهٔ ۱ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم. پس $S=۲$ و $P=-۱$. ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+m=۰$، از k برابر مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$، ۲ واحد کم‌تر است، پس ریشه‌های معادلهٔ بالا را می‌توانیم به صورت $\{k\alpha^۳-۲\,,\, k\beta^۳-۲\}$ در نظر بگیریم. برای محاسبهٔ m، نیاز به محاسبهٔ ضرب ریشه‌ها داریم. اما چون k مجهول است،ابتدا با کمک جمع ریشه‌ها، k را می‌یابیم.

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } S' = -\frac{-۱۲}{۴} = ۳ \Rightarrow k\alpha^۳-۲+k\beta^۳-۲ = ۳$$

$$\Rightarrow k(\alpha^۳+\beta^۳) = ۷ \Rightarrow k(S^۳-۳PS) = ۷$$

$$\xrightarrow[P=-۱]{S=۲} k(۸-۳(-۱)(۲)) = ۷ \Rightarrow k = \frac{۱}{۲}$$

حالا به سراغ حاصل‌ضرب ریشه‌ها می‌رویم:

$$P' = \frac{m}{۴} \Rightarrow (k\alpha^۳-۲)(k\beta^۳-۲) = \frac{m}{۴}$$

$$\Rightarrow k^۲(\alpha^۳\beta^۳)-۲(k\alpha^۳+k\beta^۳)+۴ = \frac{m}{۴}$$

$$\Rightarrow k^۲P^۳-۲k(S^۳-۳PS)+۴ = \frac{m}{۴}$$

$$\xrightarrow[P=-۱]{k=\frac{۱}{۲}\,,\,S=۲} \frac{۱}{۴}(-۱)-۲(\frac{۱}{۲})(۸+۶)+۴ = \frac{m}{۴}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۴}-۱۴+۴ = \frac{m}{۴} \Rightarrow m = -۱-۵۶+۱۶ = -۴۱$$

۱۲۴- گزینهٔ ۳ با فرض $x^۳ = t$ داریم:

$$\text{معادله : } t^۲-۹t+۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (t-۱)(t-۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \Rightarrow x^۳=۱ \Rightarrow x=۱ \\ t=۸ \Rightarrow x^۳=۸ \Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = ۱+۲ = ۳$$

۱۲۵- گزینهٔ ۲ با فرض $x^۲ = t$ داریم:

$$\text{معادله: } t^۲-۲t+۱ = ۰ \Rightarrow (t-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱$$

$$\xrightarrow{x^۲=t} x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm۱$$

۱۲۶- گزینهٔ ۲ با فرض $x^۲+x = t$، داریم:

$$\text{معادله: } t^۲-۱۸t+۷۲ = ۰ \Rightarrow (t-۶)(t-۱۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۶ \\ t=۱۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^۲+x=t} \begin{cases} x^۲+x=۶ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰ \\ x^۲+x=۱۲ \Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=-۳\,,\,x=۲ \\ \Rightarrow (x+۴)(x-۳)=۰ \Rightarrow x=-۴\,,\,x=۳ \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر $-۳+۲-۴+۳ = -۲$ است.

البته این کار رو می‌تونستید بکنید:

$$x^۲+x-۶=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \text{جمع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -۱$$

$$x^۲+x-۱۲=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \text{جمع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -۱$$

$$\Rightarrow \text{مجموع کل ریشه‌ها} = (-۱)+(-۱) = -۲$$

۱۲۷- گزینهٔ ۳ با فرض $(*)$ $x^۲-۲x = t$ داریم:

$$\text{معادله : } t^۲-t = ۲ \Rightarrow t^۲-t-۲ = ۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۲ \\ t=-۱ \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} x^۲-۲x=۲ \Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰ \\ x^۲-۲x=-۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\Delta>۰} \text{دو ریشهٔ حقیقی دارد.} \\ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$n=۱$ ریشهٔ معادلهٔ بالایی نیست، پس معادله در مجموع سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

۱۲۸- گزینهٔ ۲

$$(x^۲-۱)^۲ = x^۲+۵ \Rightarrow x^۴-۲x^۲+۱ = x^۲+۵$$

$$\Rightarrow x^۴-۳x^۲-۴ = ۰$$

با فرض $x^۲ = t$، داریم: $\quad$ معادله: $t^۲-۳t-۴ = ۰$

$$\Rightarrow (t-۴)(t+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-۱ \\ t=۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^۲=t} \begin{cases} x^۲ = -۱ \quad (\text{جواب‌ندارد}) \\ x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm۲ \end{cases}$$

پس معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و یکی منفی است.

۱۲۹- گزینهٔ ۴ با فرض $x^۴-x^۲ = t$، داریم:

$$\text{معادله: } t^۲-۵t-۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t=-۱ \xrightarrow{x^۴-x^۲=t} x^۴-x^۲=-۱ \\ t=۶ \xrightarrow{x^۴-x^۲=t} x^۴-x^۲=۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۴-x^۲+۱=۰ \\ x^۴-x^۲-۶=۰ \end{cases}$$

حل نشدکه! یک بار دیگه از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. با فرض $x^۲ = A$ داریم:

$$\begin{cases} A^۲-A+۱=۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{ریشه‌ندارد.} \\ A^۲-A-۶=۰ \Rightarrow (A-۳)(A+۲)=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -۲\,,\,A = ۳$$

حالا متغیر را برمی‌گردانیم:

$$\xrightarrow{x^۲=A} \begin{cases} x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳} \\ x^۲ = -۲ \quad (\text{معادله جواب ندارد.}) \end{cases}$$

پس معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۳۰- گزینهٔ ۳ $۲x$ را می‌بریم طرف راست و مربع کامل می‌کنیم:

$$(x-۱)^۴+۲x = x^۲+۳ \Rightarrow (x-۱)^۴ = x^۲-۲x+۳$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۴ = (x^۲-۲x+۱)+۲ = (x-۱)^۲+۲$$

حالا با فرض $(x-۱)^۲ = t$ داریم:

$$t^۲ = t+۲ \Rightarrow t^۲ - t - ۲ = ۰ \Rightarrow (t+۱)(t-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \\ t = -۱ \end{cases} \xrightarrow{(x-۱)^۲ = t} \begin{cases} (x-۱)^۲ = ۲ \Rightarrow x-۱ = \pm\sqrt{۲} \\ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۱+\sqrt{۲} \\ x_۲ = ۱-\sqrt{۲} \end{cases} \\ (x-۱)^۲ = -۱ \quad \times \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادله، $۱-\sqrt{۲}$ است.

۱۳۱- گزینهٔ ۲ اول از تغییر متغیر $x^۲ = t$ استفاده می‌کنیم:

معادله: $t^۲ - (m+۲)t + m + ۵ = ۰$

برای این‌که معادلهٔ اصلی ۴تا ریشه داشته باشد، با توجه به این‌که $x^۲ = t$ است، باید برای t دوتا جواب مثبت به دست بیاید که برای x چهارتا جواب حاصل شود. پس باید معادلهٔ $t^۲ - (m+۲)t + m + ۵ = ۰$ دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. این معادله هم زمانی دو ریشهٔ مثبت دارد که:

$$\begin{cases} (۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow (-(m+۲))^۲ - ۴(m+۵)(۱) > ۰ \\ \Rightarrow m^۲ + ۴m + ۴ - ۴m - ۲۰ > ۰ \Rightarrow m^۲ > ۱۶ \\ \Rightarrow m > ۴ \text{ یا } m < -۴ \\ (۲)\ \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{m+۵}{۱} > ۰ \Rightarrow m > -۵ \\ (۳)\ -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow -\frac{-(m+۲)}{۱} > ۰ \Rightarrow m+۲ > ۰ \\ \Rightarrow m > -۲ \end{cases}$$

از اشتراک ۱، ۲ و ۳ حدود m به دست می‌آید: $m > ۴$.

۱۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا با استفاده از تغییر متغیر $x^۲ = t$ داریم:

معادله: $\frac{۱}{۴}t^۲ + mt + m^۲ - ۱ = ۰ \quad (*)$

برای این‌که معادلهٔ اصلی دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد.

۱ معادلهٔ $(*)$ یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی داشته باشد. پس باید $\frac{c}{a} < ۰$ باشد:

$$\frac{m^۲ - ۱}{\frac{۱}{۴}} < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۱$$

۲ معادلهٔ $(*)$ یک ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد:

$$\begin{cases} \Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴(\frac{۱}{۴})(m^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow m^۲ - m^۲ + ۱ = ۰ \\ \Rightarrow ۱ = ۰ \text{ غقق} \\ -\frac{b}{a} > ۰ \end{cases}$$

پس محدودهٔ قابل قبول برای m بازهٔ $(-۱, ۱)$ است.

۱۳۳- گزینهٔ ۴ معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x^۴ - mx^۲ - m^۲ - ۱ = ۰ \quad (*)$$

با فرض $x^۲ = t$ داریم: $t^۲ - mt - m^۲ - ۱ = ۰ \quad (**)$

چون $\frac{c}{a} = -m^۲ - ۱ < ۰$ است، پس معادلهٔ $(**)$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت (یکی مثبت $(t_۱)$ و دیگری منفی $(t_۲)$) دارد. در نتیجه در معادلهٔ $(*)$ داریم:

$$\begin{cases} x^۲ = t_۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_۱} \\ x^۲ = t_۲ \xrightarrow{t_۲ < ۰} \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

پس ریشه‌های معادلهٔ $(*)$، $\sqrt{t_۱}$ و $-\sqrt{t_۱}$ است. چون یکی از ریشه‌ها چهار واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر است. بنابراین:

$$\sqrt{t_۱} = -\sqrt{t_۱} + ۴ \Rightarrow ۲\sqrt{t_۱} = ۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{t_۱} = ۲ \xrightarrow{x = \pm\sqrt{t_۱}} x = \pm ۲$$

چون $x = \pm ۲$ ریشه‌های معادلهٔ $(*)$ هستند بنابراین ریشهٔ بزرگ‌تر معادله $x = ۲$ است.
