ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضی و آمار ۱ (دهم)** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم، بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. برای این آزمون‌ها در کنار سؤالات نکات مشاوره‌ای نوشتیم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کنند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا یک آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

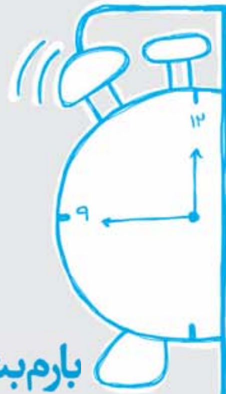
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضی و آمار (۱) نیاز دارید، تنها در ۱۰ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

فهرست



بارم‌بندی درس ریاضی و آمار (۱)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم
اول	۱۰ نمره	۳/۵ نمره
دوم: تا صفحهٔ ۶۲	۱۰ نمره	۵/۵ نمره
دوم: درس ۴	——	
سوم	——	۶/۵ نمره
چهارم	——	۴/۵ نمره
جمع	۲۰ نمره	۲۰ نمره

ردیف	آزمــــون شمــــارۀ ۱	نوبت اول پایۀ دهم دورۀ متوسطۀ دوم	نمره

فصل اول

۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب پُر کنید: ۱

الف) معادلۀ مربوط به شکل مقابل برابر با .... می‌باشد.

ب) می‌خواهیم معادلۀ $x^{۲} - ۱۰x + ۲۵ = ۰$ را به کمک تجزیه حل کنیم. برای این منظور عبارت $x^{۲} - ۱۰x + ۲۵$ را به شکل .... تجزیه می‌کنیم.

پ) معادلۀ $۳x^{۲} + x + ۷ = ۰$ دارای .... ریشۀ حقیقی است.

ت) در نقطه یا نقاط سربه‌سر، درآمد شرکت با .... برابر است.

۲ حاصل جمع عددی با مربعش ۳۰ است. با تشکیل یک معادله، این عدد را به دست آورید. (مسئله چند جواب دارد؟) ۱

۳ معادلات زیر را به روش‌های خواسته‌شده حل کنید. ۲/۲۵

الف) $۵x^{۲} = ۶x$ (تجزیه)

ب) $x^{۲} - ۴x - ۱۰ = ۰$ (مربع کامل)

پ) $x^{۲} - x + ۱۲ = ۰$ (روش کلی یا دلتا)

در این‌گونه مسائل که روش حل هر معادله گفته شده، اگه نتونستین به روشی که خواسته شده، معادله رو حل کنید از هر روشی که بلدین، استفاده کنید تا حداقل نصف نمره رو بهتون بدن.

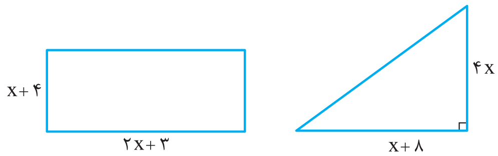
۴ معادلۀ گویای مقابل را حل کنید. آیا جواب یا جواب‌های آن قابل قبول است؟ ۱

$$\frac{۲}{x-۲} + \frac{۱}{(x-۲)^{۲}} = ۳$$

پس از حل معادلات گویا (کسری) یادتون نره جواب یا جواب‌ها رو در مخرج‌ها بذارید. هیچ مخرجی نباید صفر بشه.

۵ در یک کارخانۀ تولید فولاد، از روز یک‌شنبه، تولید هر روز نسبت به روز قبل ۳ برابر می‌شود. در پایان روز چهارشنبه، تولید فولاد به سقف ۱۶۲ هزار تن رسیده است. مجموع تولید در این پنج روز چه‌قدر بوده است؟ (اولین روز کاری، شنبه است) ۱

۶ مساحت مستطیل و مثلث زیر با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید. ۱



۷ معادلۀ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۱۰ و ۶- باشند. ۱

۸ معادلات درآمد و هزینه در یک شرکت به صورت $R(x) = -x^{۲} + ۶x$ و $C(x) = x + ۴$ می‌باشد. (R درآمد و C هزینه است.) ۱/۷۵

الف) معادلۀ سود شرکت را به دست آورید.

ب) بیشترین سود شرکت چه‌قدر است؟

پ) نقطه یا نقاط سربه‌سر را به دست آورید.

ت) به ازای تولید چه‌مقدار کالا، سوددهی خواهیم داشت؟

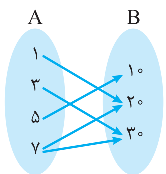
فصل دوم

۹ تابع بودن یا نبودن هر یک از رابطه‌های زیر را بررسی کنید. ۱

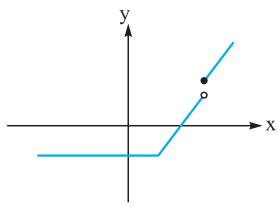
تقریباً توی همۀ امتحانات، یه سؤال در مورد بررسی تابع‌بودن یا نبودن رابطه‌ها مطرح می‌شه، پس تشخیص تابع رو جدی بگیرید لطفاً.

الف) $f = \{(۱,۳), (۴,۸), (۵,۱۰)\}$

ب)



پ)



ت) $y^{۲} = x^{۲} + ۵$

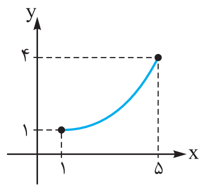
۱۰ با فرض آن‌که $\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = |x^{۲} - ۳x + ۱| \end{cases}$ و $A = \{-۲, ۰, ۲\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید؛ سپس نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی و جدول آن را رسم کنید. ۱/۵

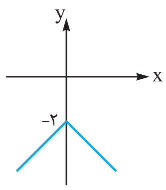
ریاضی و آمار (۱)	رشته: ادبیات و علوم انسانی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com

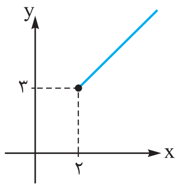
ردیف	آزمـــون شمـــارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ دهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره

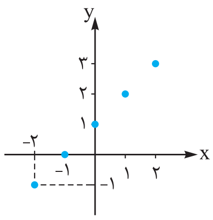
۱۱ دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید. (نمره: ۲)

یادتون باشه که دامنه یعنی محدودهٔ تغییرات x و بُرد یعنی محدودهٔ تغییرات y.

ت)


پ)


ب)


الف)


۱۲ اگر مجموعهٔ $f=\{(۱,a-۴b),(۳,۴),(۱,۵),(۳,b-a)\}$ یک تابع باشد، a و b را به دست آورید. (نمره: ۱/۲۵)

۱۳ اگر $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۳x}$ باشند، حاصل $f(۰)+۵g(۱)$ را به دست آورید. (نمره: ۱/۲۵)

۱۴ نمودار تابع $y=۲x-۴$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را مشخص کنید. (نمره: ۱/۵)

۱۵ نمودار تابع $y=-x^۲-۲x+۴$ را رسم کرده و بگویید سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم؟ (نمره: ۱/۵)

موفق باشید — جمع نمرات: ۲۰

۱ معادلهٔ $(1+x)^2-6=(1+x)^2$ را به روش دلخواه حل کنید. ۱

۲ در یک کارخانهٔ مدادسازی، هزینهٔ اولیه برابر ۸۰ دلار و هزینهٔ تولید هر مداد برابر ۱۸ دلار است. اگر x تعداد مدادها و p قیمت فروش هر مداد باشد و رابطهٔ ۱/۵
$x=120-4p$ برقرار باشد:
الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.
ب) بیشترین سود کارخانه، به ازای تولید چند مداد حاصل می‌شود؟
پ) ماکزیمم (حداکثر) سود کارخانه چه‌قدر است؟

۳ وقتی دو شیر آب با هم باز باشند، یک استخر در $\frac{6}{5}$ ساعت پُر آب می‌شود. اگر شیر A به تنهایی باز باشد، یک ساعت زمان بیشتری برای پُرکردن استخر نسبت ۱
به شیر B لازم دارد. هر یک از شیرها به تنهایی در چند ساعت استخر را پُر می‌کنند؟

۴ در رابطهٔ مقابل، در جاهای خالی، طوری عدد بگذارید که f تابع شود. ۱
$f=\{(3,6),(\frac{\sqrt{2}}{2},5),(\sqrt{9},\dots),(\frac{1}{\sqrt{2}},\dots)\}$

۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx-2$ با شرط $f(1)=-3$ و $f(3)=7$ مقادیر a و b را به دست آورید. ۱

۶ طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده، ۱۰ سانتی‌متر است و به ازای هر کیلوگرم، وزنه‌ای که به آن آویزان می‌شود، ۰/۵ سانتی‌متر به طول ۲
آن افزوده می‌شود. ضابطهٔ تابع خطی f (طول فنر) را بر حسب وزن جسم (x) به دست آورید؛ سپس مقادیر $f(4)$ و $f(h-1)$ را محاسبه کرده و نمودار تابع
f را رسم کنید.

۷ نقطه یا نقاط تلاقی دو سهمی $y=x^2-3x$ و $y=2x^2-8x$ را به دست آورید. ۱/۵

۸ در هر مورد، از چه روشی برای جمع‌آوری داده‌ها استفاده می‌کنیم؟ ۱
الف) رضایت مشتریان یک بانک از نحوهٔ برخورد کارکنان
ب) بررسی تعداد افراد صاحب‌خانه در ایران

۹ نوع هر متغیر را زیر آن بنویسید. ۲

متغیر تصادفی	وضع تأهل افراد	مقدار سرعت ماشین‌ها	سابقهٔ کار دبیران	مراحل کشت محصولات کشاورزی
نوع متغیر				

۱۰ میانگین اعداد $2x-3$، $7x+1$ و $x-1$ برابر ۱۶ است. مقدار x را به دست آورید. ۱

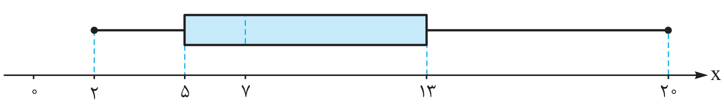
۱۱ در داده‌های $(1,5,7,8,x,12,14,15)$ که از کوچک به بزرگ مرتب شده‌اند، میانه برابر ۱۰ است. مد را به دست آورید. ۱

۱۲ نمرات درس فیزیک دانش‌آموزی در طول سال برابر است با ۱۷ ,۱۳ ,۸ ,۲۰ ,۱۹ ,۱۷ ,۱۸ ,۱۹: ۱/۵
الف) میانگین، میانه و مُد را به دست آورید.
ب) کدام‌یک از شاخص‌های مرکزی بالا، وضعیت وی در درس فیزیک را بهتر نشان می‌دهد؟
پ) اگر معلم فیزیک، برای جبران نمرهٔ ۸ به او امکان امتحان مجدد بدهد، برای آن‌که میانگین نمرات او در این درس ۱۷ شود، چه نمره‌ای باید کسب کند؟

۱۳ برای جدول زیر، ۲ نمودار دایره‌ای برحسب درصد و درجه رسم کنید. ۲

گروه خونی	A	B	AB	O
فراوانی	۲۴	۴	۱۰	۱۲

۱۴ با توجه به نمودار جعبه‌ای مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید: ۲/۵



الف) دامنهٔ تغییرات و دامنهٔ میان چارکی کدام‌اند؟
ب) چند درصد داده‌ها بزرگ‌تر از ۷ هستند؟
پ) چند درصد داده‌ها کوچک‌تر از ۱۳ هستند؟
ت) ۷۵ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از چه عددی هستند؟

موفق باشید — جمع نمرات ۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- الف) معادلهٔ خواسته‌شده برابر است با: $3x+1=7$

ب) $x^2-10x+25=(x-5)(x-5)=(x-5)^2$

پ) $\Delta=b^2-4ac=1^2-4(3)(7)=1-84=-83$

پس معادله، دارای صفر ریشه است. (هیچ ریشه‌ای ندارد.)

ت) هزینه‌های شرکت

۲- عدد مطلوب را x در نظر می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$x+x^2=30 \Rightarrow \underbrace{x^2+x-30=0}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} \Rightarrow (x+6)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+6=0 \Rightarrow x=-6 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

پس مسئله دو جواب دارد.

۳- الف) $5x^2=6x \Rightarrow 5x^2-6x=0 \Rightarrow x(5x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{5} \end{cases}$

ب) $x^2-4x-10=0 \Rightarrow x^2-\underset{b}{4x}=10 \xrightarrow[\text{را به طرفین می‌افزاییم}]{\frac{b^2}{4}=\frac{(-4)^2}{4}=4\ \text{عدد}} \underbrace{x^2-4x+4}_{\text{اتحاد مربع}}=10+4$

$$\Rightarrow (x-2)^2=14 \xrightarrow{\text{جذر}} x-2=\pm\sqrt{14} \Rightarrow \begin{cases} x-2=\sqrt{14} \Rightarrow x=2+\sqrt{14} \\ x-2=-\sqrt{14} \Rightarrow x=2-\sqrt{14} \end{cases}$$

پ) $\underset{a}{1x^2}-\underset{b}{1x}+\underset{c}{12}=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(12)=1-48=-47$

معادله جواب ندارد. چون دلتا عددی منفی شده است.

۴- $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}=3 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{مخرج مشترک}} \frac{2(x-2)+1}{(x-2)^2}=3$

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 3(x-2)^2=2(x-2)+1 \Rightarrow 3(x^2-4x+4)=2x-4+1$$

$$\Rightarrow 3x^2-12x+12-2x+3=0 \Rightarrow 3x^2-14x+15=0$$

$$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=196-180=16 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{14\pm4}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{14+4}{6}=3 \\ x=\frac{14-4}{6}=\frac{5}{3} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند؛ چون در معادلهٔ اصلی، هیچ مخرجی را به صفر تبدیل نمی‌کنند.

۵- اگر تولید روز شنبه را x فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\underset{\text{شنبه}}{x} \xrightarrow{\times3} \underset{\text{یکشنبه}}{3x} \xrightarrow{\times3} \underset{\text{دوشنبه}}{9x} \xrightarrow{\times3} \underset{\text{سه‌شنبه}}{27x} \xrightarrow{\times3} \underset{\text{چهارشنبه}}{81x} \Rightarrow 81x=162 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$\text{مجموع تولیدات پنج روز}=x+3x+9x+27x+81x=121x=121(2)=242$ هزار تن

۶- $\text{مساحت مستطیل}=\text{طول}\times\text{عرض}=(2x+3)(x+4)=2x^2+11x+12$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{2}=\frac{(x+8)\overset{2x}{\cancel{(4x)}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}=2x(x+8)=2x^2+16x$$

$\text{مساحت مثلث}=\text{مساحت مستطیل}$

$$\Rightarrow \cancel{2x^2}+11x+12=\cancel{2x^2}+16x \Rightarrow 5x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{5}$$

$$\text{طول مستطیل}=2x+3=2\left(\frac{12}{5}\right)+3=\frac{39}{5}$$

$$\text{عرض مستطیل}=x+4=\frac{12}{5}+4=\frac{32}{5}$$

۷- $\begin{cases} x=10 \\ x=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-10=0 \\ x+6=0 \end{cases} \Rightarrow (x-10)(x+6)=0$

$$\Rightarrow x^2+6x-10x-60=0 \Rightarrow x^2-4x-60=0$$

۸- الف) تابع سود $P(x)=R(x)-C(x)=-x^2+6x-x-4=-x^2+5x-4$

ب) $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-5}{2(-1)}=\frac{5}{2} \xrightarrow[\text{سود}]{\text{در تابع}} P_{max}=-\left(\frac{5}{2}\right)^2+5\left(\frac{5}{2}\right)-4$

$=-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}-4=\frac{-25+50-16}{4}=\frac{9}{4}=$ ۲/۵ بیشترین سود

پ) برای یافتن نقطه یا نقاط سربه‌سر باید تابع سود را مساوی صفر قرار دهیم:

$$P(x)=0 \Rightarrow -x^2+5x-4=0 \xrightarrow{\times(-1)} \underbrace{x^2-5x+4}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}=0 \Rightarrow (x-4)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

ت) به ازای تولید $1<x<4$ از کالای موردنظر سوددهی خواهیم داشت.

۹- الف) تابع است؛ چون عضوهای اول زوج مرتب‌ها، همگی مختلف هستند.

ب) تابع نیست؛ چون از عدد ۷ دو فلش خارج شده است.

پ) تابع است؛ چون هر خط عمودی دلخواه که رسم کنیم نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند.

ت) تابع نیست؛ چون توان y زوج است و مثلاً اگر به x عدد صفر را نسبت دهیم برای y دو مقدار مختلف بدست می‌آید: $y^2=x^2+5 \xrightarrow{(x=0)} y^2=5 \xrightarrow{\text{جذر}} y=\pm\sqrt{5}$

۱۰- $f(x)=|x^2-3x+1|$

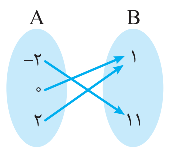
$$\xrightarrow{x=-2} f(-2)=|(-2)^2-3(-2)+1|=11$$

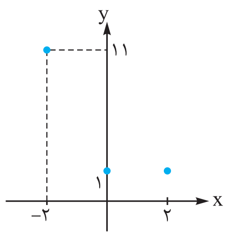
$$\xrightarrow{x=0} f(0)=|0^2-3(0)+1|=1$$

$$\xrightarrow{x=2} f(2)=|2^2-3(2)+1|=1$$

x	-2	0	2
y	11	1	1

$\Rightarrow$ برد $R_f=\{1,11\}$





۱۱- الف) $\begin{cases} D_f=\{-2,-1,0,1,2\} \\ R_f=\{-1,0,1,2,3\} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} D_f=\{x|x\geq2\} \\ R_f=\{y|y\geq3\} \end{cases}$

پ) $\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ R_f=\{y|y\leq-2\} \end{cases}$

ت) $\begin{cases} D_f=\{x|1\leq x\leq5\} \\ R_f=\{y|1\leq y\leq4\} \end{cases}$

۱۲-

$$\begin{aligned} (1,a-4b)=(1,5) &\Rightarrow \cancel{a}-4b=5 \\ (3,4)=(3,b-a) &\Rightarrow b-\cancel{a}=4 \\ &-3b=9 \Rightarrow b=-3 \end{aligned}$$

حالا ۳- را در یکی از رابطه‌ها به جای b قرار می‌دهیم تا a هم پیدا شود:

$$b-a=4 \Rightarrow -3-a=4 \Rightarrow a=-7$$

۱۳- $f(x)=|x-1| \xrightarrow{x=0} f(0)=|0-1|=|-1|=1$

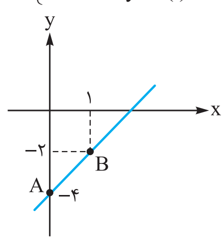
$$g(x)=\sqrt{x^2+3x} \xrightarrow{x=1} g(1)=\sqrt{1^2+3(1)}=\sqrt{4}=2$$

$$\Rightarrow f(0)+5g(1)=1+5(2)=11$$

۱۴- کافی است به x دو عدد دلخواه نسبت دهیم و y مربوط به آن‌ها را به دست آوریم:

$y=2x-4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=0} y=2(0)-4=-4 \Rightarrow A(0,-4) \\ \xrightarrow{x=1} y=2(1)-4=-2 \Rightarrow B(1,-2) \end{cases}$$



$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه}=\mathbb{R} \\ \text{برد}=\mathbb{R} \end{cases}$

۱۵- این سهمی ماکزیمم دارد چون ضریب $x^۲$ منفی است. ابتدا مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$y=-x^۲-۲x+۴$$

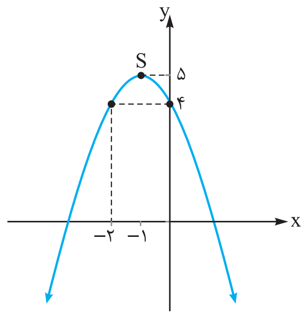
$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲(-۱)}=-۱$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع قرار می‌دهیم}} y_S=-(-۱)^۲-۲(-۱)+۴=-۱+۲+۴=۵ \Rightarrow S\begin{vmatrix}-۱\\۵\end{vmatrix}$$

حالا از دو نقطهٔ کمکی هم استفاده می‌کنیم، یکی قبل از رأس و یکی بعد از رأس:

x	−۲	−۱	۰
y	۴	۵	۴

$\Rightarrow$



-۲ الف) تابع هزینه $C(x)=$ هزینهٔ اولیه + هزینهٔ تولید $=۸۰+۱۸x$, $x=۱۲۰-۴p$

$\Rightarrow ۴p=-x+۱۲۰ \xrightarrow{\div ۴} p=-\frac{۱}{۴}x+۳۰$, $R(x)=x.p=x(-\frac{۱}{۴}x+۳۰)$

$=\frac{-۱}{۴}x^۲+۳۰x$ تابع درآمد , تابع سود $P(x)=R(x)-C(x)=\frac{-۱}{۴}x^۲+۳۰x-۸۰-۱۸x$

$=\frac{-۱}{۴}x^۲+۱۲x-۸۰$

ب) $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲}{۲(-\frac{۱}{۴})}=\frac{۱۲}{\frac{۱}{۲}}=۲۴$ تعداد مدادها

پ) $P(x)=\frac{-۱}{۴}x^۲+۱۲x-۸۰ \xrightarrow{(x=۲۴)} P_{max}=\frac{-۱}{۴}(۲۴)^۲+۱۲(۲۴)-۸۰=۶۴$ بیشترین سود

-۳ اگر زمان مربوط به شیر A را x بنامیم، زمان مربوط به شیر B برابر $(x-۱)$ خواهد بود؛ لذا:

$t=\frac{a.b}{a+b} \Rightarrow \frac{۶}{۵}=\frac{x(x-۱)}{x+(x-۱)} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} ۵x(x-۱)=۶(۲x-۱)$

$\Rightarrow ۵x^۲-۵x-۱۲x+۶=۰ \Rightarrow ۵x^۲-۱۷x+۶=۰$

$\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۲۸۹-۱۲۰=۱۶۹ \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱۷\pm\sqrt{۱۶۹}}{۱۰}=\frac{۱۷\pm۱۳}{۱۰}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۱۷+۱۳}{۱۰}=۳\ (\text{ق ق}) \\ x=\frac{۱۷-۱۳}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}\ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$

پس شیر A در ۳ ساعت و شیر B در $x-۱=۳-۱=۲$ ساعت، استخر را پُر آب می‌کنند.

-۴ $f=\{(۳,۶),(\frac{\sqrt{۲}}{۲},۵),(\sqrt{۹},۶),(\frac{۱}{\sqrt{۲}},۵)\}$

دقت کنید که $\sqrt{۹}=۳$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$. ($\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ را گویا کرده‌ایم.)

-۵ $y=ax^۲+bx-۲$

$\xrightarrow[y=-۳]{x=۱} a(۱)^۲+b(۱)-۲=-۳ \Rightarrow a+b=-۱$

$\xrightarrow[y=۷]{x=۳} a(۳)^۲+b(۳)-۲=۷ \Rightarrow ۹a+۳b=۹ \xrightarrow{\div ۳} ۳a+b=۳$

$\times(-۱)\begin{cases} a+b=-۱ \\ ۳a+b=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-\cancel{b}=۱ \\ ۳a+\cancel{b}=۳ \end{cases} \xrightarrow[\text{یکی از معادلات}]{\text{جای‌گذاری در}} b=-۳$

$۲a=۴ \Rightarrow a=۲$

-۶ در این‌گونه مسائل باید مختصات ۲ نقطه را به کمک اطلاعات داده‌شده بنویسیم و به کمک آن‌ها شیب و معادلهٔ خط را به دست آوریم. در این‌جا x را وزن و y را طول فنر در نظر می‌گیریم؛ لذا:

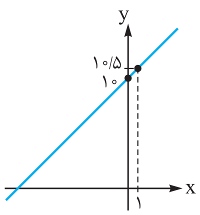
$A(۰,۱۰),B(۱,۱۰/۵) \Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱۰/۵-۱۰}{۱-۰}=۰/۵$

$y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۱۰=۰/۵(x-۰)$

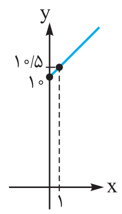
$\Rightarrow y=۰/۵x+۱۰$ (y همان f (x) است.)

$f(۴)=۰/۵(۴)+۱۰=۱۲, f(h-۱)=۰/۵(h-۱)+۱۰$

$=۰/۵h-۰/۵+۱۰=۰/۵h+۹/۵$



x (وزن اجسام) نمی‌تواند منفی باشد. پس سمت چپ محور yها را حذف می‌کنیم



-۷ کافی است دو معادلهٔ داده‌شده را با هم مساوی قرار دهیم. (y ها را در نظر نگیرید.)

$\begin{cases} y=۲x^۲-۸x \\ y=x^۲-۳x \end{cases} \Rightarrow ۲x^۲-۸x=x^۲-۳x \Rightarrow ۲x^۲-۸x-x^۲+۳x=۰$

$\Rightarrow x^۲-۵x=۰ \Rightarrow x(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۵ \end{cases}$

حال صفر و ۵ را در یکی از ۲ معادلهٔ اولیه قرار می‌دهیم *(به دلخواه یکی رو انتخاب می‌کنیم)* تا y آن‌ها هم پیدا شود.

$y=x^۲-۳x \xrightarrow{x=۰} y=۰^۲-۳(۰)=۰$

$\Rightarrow A(۰,۰), y=x^۲-۳x \xrightarrow{x=۵} y=۵^۲-۳(۵)=۱۰ \Rightarrow B(۵,۱۰)$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

-۱ $(۱+x)^۲=۶-(۱+x)^۲ \xrightarrow{\text{اتحادها را بازمی‌کنیم}} ۱+۲x+x^۲=۶-۱-۲x-x^۲$

$\Rightarrow ۲x^۲+۴x-۴=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+۲x-۲=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۴+۸=۱۲$

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲(۱)} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{-۲+\sqrt{۱۲}}{۲} \\ x''=\frac{-۲-\sqrt{۱۲}}{۲} \end{cases}$

۸- الف) مصاحبه یا پرسش‌نامه ب) دادگان (داده‌های از قبل تهیه‌شده)

۹- وضع تأهل افراد ⟵ کیفی اسمی

مقدار سرعت ماشین‌ها ⟵ کمّی نسبتی

سابقهٔ کار دبیران ⟵ کمّی نسبتی

مراحل کشت محصولات کشاورزی ⟵ کیفی ترتیبی

۱۰- $\bar{x}=۱۶ \Rightarrow \frac{۲x-۳+۷x+۱+۱-x}{۳}=۱۶ \Rightarrow ۸x-۱=۴۸ \Rightarrow ۸x=۴۹ \Rightarrow x=\frac{۴۹}{۸}$

۱۱- مد $=۱۲ \Rightarrow ۱,۵,۷,۸,۱۲,۱۲,۱۴,۱۵ \xleftarrow{\text{داده‌ها}} ۱,۵,۷,\underbrace{۸,x}_{}, ۱۲,۱۴,۱۵$

میانه $=\frac{۸+x}{۲} \Rightarrow ۱۰=\frac{۸+x}{۲} \Rightarrow ۸+x=۲۰ \Rightarrow x=۱۲$

۱۲- الف) مُد برابر ۱۷ و ۱۹ است؛ چون هر کدام ۲ بار تکرار شده‌اند.

$۸,۱۳,۱۷,\underbrace{۱۷,۱۸}_{},۱۹,۱۹,۲۰ \xrightarrow{\text{یافتن میانه}}$

میانه $=\frac{۱۷+۱۸}{۲}=۱۷/۵$

$\bar{x}=\frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}=\frac{۱۳۱}{۸}=۱۶/۳۷۵$

ب) چون دادهٔ پرت وجود ندارد؛ لذا بهتر است از میانگین استفاده کنیم نه میانه. *(نمی‌تونیم بگیم نمرهٔ ۸ دادهٔ پرته چون ۸ به ۱۳ نزدیکه و اختلاف زیادی ندارند)*؛ ضمناً از مُد هم نمی‌توان استفاده کرد؛ چون ۲ تا مُد وجود داشت.

پ) اگر نمرهٔ جدید او را x بنامیم، داریم:

$$\bar{x}=\frac{x+۱۳+۱۷+۱۷+۱۸+۱۹+۱۹+۲۰}{۸}=۱۷$$

$$\Rightarrow x+۱۲۳=۱۳۶ \Rightarrow x=۱۳۶-۱۲۳=۱۳$$

۱۳- $N=۲۴+۴+۱۰+۱۲=۵۰$

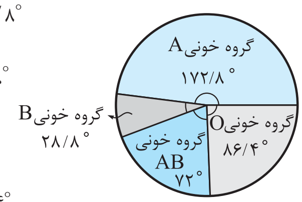
$\alpha=\frac{f}{N}\times ۳۶۰^\circ$

$\xrightarrow{f=۲۴} \alpha=\frac{۲۴}{۵۰}\times ۳۶۰^\circ=۱۷۲/۸^\circ$

$\xrightarrow{f=۴} \alpha=\frac{۴}{۵۰}\times ۳۶۰^\circ=۲۸/۸^\circ$

$\xrightarrow{f=۱۰} \alpha=\frac{۱۰}{۵۰}\times ۳۶۰^\circ=۷۲^\circ$

$\xrightarrow{f=۱۲} \alpha=\frac{۱۲}{۵۰}\times ۳۶۰^\circ=۸۶/۴^\circ$



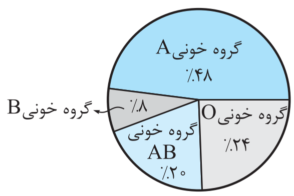
$S=\frac{f}{N}\times ۱۰۰$

$\xrightarrow{f=۲۴} S=\frac{۲۴}{۵۰}\times ۱۰۰=\%۴۸$

$\xrightarrow{f=۴} S=\frac{۴}{۵۰}\times ۱۰۰=\%۸$

$\xrightarrow{f=۱۰} S=\frac{۱۰}{۵۰}\times ۱۰۰=\%۲۰$

$\xrightarrow{f=۱۲} S=\frac{۱۲}{۵۰}\times ۱۰۰=\%۲۴$



۱۴- الف) دامنهٔ تغییرات $R=\max-\min=۲۰-۲=۱۸$

دامنهٔ میان‌چارکی $IQR=Q_۳-Q_۱=۱۳-۵=۸$

ب) ۵۰ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از ۷ هستند.

پ) ۷۵ درصد داده‌ها کوچک‌تر از ۱۳ هستند.

ت) ۷۵ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از ۵ هستند.

فصل ۱: معادلهٔ درجه دوم

معادلهٔ درجه اول و کاربردهای آن

هر معادله که پس از ساده‌شدن به صورت $ax+b=0$ تبدیل شود، معادلهٔ درجه‌اول نام دارد (a و b دو عدد حقیقی دلخواه‌اند ولی a نمی‌تواند صفر باشد.) مثلاً معادلات $3x-2=0$ ، $5x=-1$ و $\frac{x-1}{8}=2x$ همگی درجه‌اول هستند. برای حل آن‌ها ابتدا اعداد را از متغیرها جدا کرده سپس عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم:

مثال ۱: $(x+1)(x-6)=x^2+3x-1$

$\Rightarrow \cancel{x^2}-6x+x-6=\cancel{x^2}+3x-1 \Rightarrow -6x+x-3x=-1+6$

$\Rightarrow -8x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{-8}=-\frac{5}{8}$

مثال ۲: $\frac{x+3}{2}-\frac{x}{5}=1 \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}} \frac{5(x+3)-2x}{10}=1$

$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} 5x+15-2x=10$

$\Rightarrow 3x=10-15 \Rightarrow 3x=-5 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$

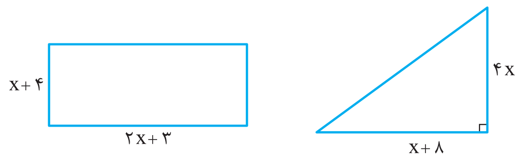
کاربرد معادلهٔ درجه‌اول در حل مسائل توصیفی: گاهی به جای آن‌که یک معادله به صورت حاضر و آماده به ما داده شود، خودمان باید با توجه به یک توصیف (متن فارسی) معادله‌ای مناسب تشکیل داده و آن را حل کنیم تا مجهول موردنظر به دست آید.

مثال: **عددی را به دست آورید که ۳ برابر آن به علاوهٔ ۱ مساوی با نصف همان عدد، منهای ۲ شود.**

حل: آن عدد را x فرض کرده و این‌طور می‌نویسیم:

$3x+1=\frac{x}{2}-2 \Rightarrow 3x-\frac{x}{2}=-2-1 \Rightarrow \frac{5x}{2}=-3 \Rightarrow 5x=-6 \Rightarrow x=\frac{-6}{5}$

مثال: **مساحت مستطیل و مثلث زیر با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.**



حل:

$\text{مساحت مستطیل} = \text{طول}\times\text{عرض} = (2x+3)(x+4)$

$=2x^2+8x+3x+12=2x^2+11x+12$

$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{2} = \frac{(x+8)\times \cancel{4}^{\,2}\,x}{\cancel{2}} = 2x(x+8)=2x^2+16x$

$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = \text{مساحت مثلث} \Rightarrow \cancel{2x^2}+11x+12=\cancel{2x^2}+16x$

$\Rightarrow 16x-11x=12 \Rightarrow 5x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{5}$

$\text{عرض مستطیل} = x+4=\frac{12}{5}+4=\frac{32}{5}$

$\text{طول مستطیل} = 2x+3=2(\frac{12}{5})+3=\frac{24}{5}+3=\frac{39}{5}$

معادلهٔ درجه دوم و روش‌های حل آن

هر معادله که پس از ساده‌شدن به شکل $ax^2+bx+c=0$ تبدیل شود، با شرط $a\neq 0$ یک معادلهٔ درجه‌دوم نام دارد. به a ضریب x^2، به b ضریب x و به c عدد ثابت می‌گوییم.

مثلاً در معادلهٔ $-x^2+6x-7=0$ ضرایب معادله عبارت‌اند از: $c=-7$ ، $b=+6$ و $a=-1$ و یا در معادلهٔ $\frac{x^2}{5}+3=0$ ضرایب معادله برابرند با: $c=3$ ، $b=0$ و $a=\frac{1}{5}$.

روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم

۱ روش تجزیه: در فصل ۱ با تجزیهٔ عبارت‌های جبری آشنا شدید. بسیاری از معادلات درجه‌دوم را به کمک فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها حل می‌کنیم:

مثال ۱: $\underbrace{14x^2-12x}_{\text{فاکتور از }2x}=0 \Rightarrow 2x(7x-6)=0$

البته می‌تونین از x هم فاکتور بگیرین

$\Rightarrow \begin{cases}2x=0 \Rightarrow x=0\\ 7x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{7}\end{cases}$

مثال ۲: $\underbrace{64x^2-100}_{\text{اتحاد مزدوج}}=0 \Rightarrow (8x-10)(8x+10)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}8x-10=0 \Rightarrow x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}\\ 8x+10=0 \Rightarrow x=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}\end{cases}$

مثال ۳: $\underbrace{x^2-x-56}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}=0 \Rightarrow (x-8)(x+7)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}x-8=0 \Rightarrow x=8\\ x+7=0 \Rightarrow x=-7\end{cases}$

۲ روش جذرگیری (ریشه‌گیری): از این روش فقط زمانی می‌توانیم استفاده کنیم که معادله شامل x^2 هست ولی x^1 ندارد. در این صورت عدد ثابت را به سمت راست تساوی برده و از دو طرف جذر می‌گیریم.

مثال ۱: $x^2-49=0 \Rightarrow x^2=49 \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذر از}} x=\pm\sqrt{49}=\pm 7$

مثال ۲: $9x^2-64=0 \Rightarrow 9x^2=64 \Rightarrow x^2=\frac{64}{9} \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذر از}}$

$x=\pm\sqrt{\frac{64}{9}}=\pm\frac{8}{3}$

مثال ۳: $(x-3)^2=25 \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذر از}} x-3=\pm 5 \Rightarrow \begin{cases}x-3=5 \Rightarrow x=8\\ x-3=-5 \Rightarrow x=-2\end{cases}$

۳ روش مربع کامل: در این روش ابتدا اگر ضریب x^2 عددی به‌جز ۱ بود تمام جملات معادله را بر آن ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 یک شود سپس ضریب x را نصف کرده به توان ۲ می‌رسانیم، عدد حاصل را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم (به طور خلاصه $\frac{b^2}{4}$ را به دو طرف معادله، اضافه می‌کنیم که b ضریب x است.) سمت چپ معادله، حتماً اتحاد مربع ۲ جمله‌ای خواهد شد. در نهایت مانند روش جذرگیری عمل می‌کنیم:

مثال ۱: $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x^2-\underset{b}{4}x=-3$

$\xrightarrow[\text{را به دو طرف می‌افزاییم}]{\text{عدد } \frac{b^2}{4}=\frac{(-4)^2}{4}=4} \underbrace{x^2-4x+4}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}=-3+4 \Rightarrow (x-2)^2=1$

$\xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذر از}} x-2=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases}x-2=1 \Rightarrow x=3\\ x-2=-1 \Rightarrow x=1\end{cases}$

مثال ۲: $2x^2+10x=1 \xrightarrow{\div 2} x^2+\underset{b}{5}x=\frac{1}{2}$

$\xrightarrow[\text{را به دو طرف اضافه می‌کنیم}]{\text{عدد } \frac{b^2}{4}=\frac{5^2}{4}=\frac{25}{4}} \underbrace{x^2+5x+\frac{25}{4}}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}=\frac{1}{2}+\frac{25}{4} \Rightarrow (x+\frac{5}{2})^2=\frac{27}{4}$

$\Rightarrow x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{27}{4}}=\pm\frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow \begin{cases}x+\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{27}}{2}-\frac{5}{2}\\ x+\frac{5}{2}=\frac{-\sqrt{27}}{2} \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{27}}{2}-\frac{5}{2}\end{cases}$

۴) روش کلی (روش استفاده از دلتا): در این روش ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه کرده، سپس حالات زیر را خواهیم داشت:

الف) اگر $\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله ۲ ریشهٔ متمایز دارد.

که این ریشه‌ها عبارت‌اند از: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

ب) اگر $\Delta = 0 \Rightarrow$ معادله ریشهٔ مضاعف دارد.

که این ریشه عبارت است از: $x = \frac{-b}{2a}$

پ) اگر $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

ضمناً به دلتا (Δ) مبیّن معادله هم می‌گوییم. حال معادلات زیر را به روش کلی حل می‌کنیم:

مثال ۱) $\underset{a}{1}x^2 \underset{b}{-5}x \underset{c}{-6} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6)$

$= 25 + 24 = 49$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{5+7}{2} = 6 \\ x'' = \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$$

مثال ۲) $\underset{a}{1}x^2 \underset{b}{-10}x \underset{c}{+25} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25)$

$= 100 - 100 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2(1)} = 5$

مثال ۳) $\underset{a}{1}x^2 \underset{b}{+2}x \underset{c}{+3} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(3) = -8$

معادله جواب ندارد چون دلتای آن منفی شده است.

نکته: گاهی اوقات یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم داده می‌شود و پارامتری مثل k، m، n و ... خواسته می‌شود که باید به جای تمام متغیرهای معادله، ریشهٔ داده‌شده را قرار دهیم.

مثال: به ازای چه مقدار از k معادلهٔ $10x^2 - 4x + 3k = 0$ دارای جواب $x = 1$ است؟

حل: $10x^2 - 4x + 3k = 0 \xrightarrow{(x=1)} 10(1)^2 - 4(1) + 3k = 0$

$\Rightarrow 3k = -6 \Rightarrow k = -2$

مجموع وضرایب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بدون آن‌که معادله را حل کنیم می‌توانیم به سرعت بگوییم که:

مجموع ریشه‌ها: $x' + x'' = \frac{-b}{a}$
حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $x'.x'' = \frac{c}{a}$

البته توجه دارید که Δ حتماً باید مثبت باشد تا معادله دارای ۲ ریشهٔ متمایز باشد.

مثال: بدون حل معادلهٔ $-x^2 + 3x + 4 = 0$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن را به دست آورید.

حل:
$$\underset{a}{-1}x^2 \underset{b}{+3}x \underset{c}{+4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1} = 3 \\ x'.x'' = \frac{c}{a} = \frac{4}{-1} = -4 \end{cases}$$

نوشتن معادلات درجه‌دومی که جواب‌های همگی آن‌ها یکسان است فرض کنید معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ دارای جواب‌های x' و x'' باشد. حال اگر تمام جملات معادله را در عدد $k \neq 0$ ضرب کنیم، معادلهٔ حاصل هم دارای جواب‌های x' و x'' خواهد بود.

مثلاً جواب‌های معادلهٔ $x^2 - 5x - 6 = 0$ عبارت‌اند از ۱- و ۶. حال مثلاً اگر تمام جملات معادله را در ۲ ضرب کنیم، به معادلهٔ $2x^2 - 10x - 12 = 0$ می‌رسیم. با حل این معادله می‌بینیم که جواب‌ها باز هم ۱- و ۶ خواهند بود.

نوشتن معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌هایش به ما داده شده است اگر ریشه‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم را m و n بنامیم، خود معادلهٔ درجه‌دوم مربوط به این ریشه‌ها برابر است با $(x-m)(x-n) = 0$. اگر معادله‌ای ریشهٔ مضاعف m داشته باشد، معادلهٔ مربوط به آن برابر با $(x-m)^2 = 0$ خواهد بود.

مثال: معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۳ و ۱۰- باشند. آیا این معادله منحصربه‌فرد است؟

حل: $(x-3)(x-(-10)) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+10) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 10x - 3x - 30 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 30 = 0$

این معادله، منحصربه‌فرد نیست و اگر جملات آن را در عدد $k \neq 0$ ضرب کنیم، معادلهٔ حاصل هم دارای ریشه‌های ۳ و ۱۰- خواهد بود.

مثال: معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشهٔ مضاعف $x = \sqrt{3}$ داشته باشد.

حل: $\underbrace{(x-\sqrt{3})^2}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

کاربرد معادلهٔ درجه‌دوم در حل مسائل

گاهی باید برای یک توصیف داده‌شده، معادله‌ای مناسب تشکیل دهیم و با حل آن، به مجهول موردنظر برسیم. فقط باید حواسمان باشد معادله‌ای که تشکیل می‌دهیم باید دارای یک متغیر مثل x باشد؛ یعنی اگر ۲ متغیر مثل x و y داشته باشیم باید آن‌ها را به یک متغیر تبدیل کنیم.

مثال: عددی صحیح پیدا کنید که مربعش با سه برابرش مساوی باشد. مسئله چند جواب دارد؟

حل: اگر عدد صحیح موردنظر را x فرض کنیم می‌توانیم این‌طور بنویسیم که:

$$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

صفر و ۳ هر دو عدد صحیح‌اند پس مسئله دو جواب دارد.

مثال: رضا از خواهرش ۲ سال کوچک‌تر است. اگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۸۰ باشد، سن هر دو را پیدا کنید.

حل: اگر سن رضا را x فرض کنیم، سن خواهرش $(x+2)$ خواهد بود لذا:

$$x(x+2) = 80 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 2x - 80}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow (x+10)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10 \quad (\text{سن نمی‌تواند منفی باشد}) \\ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \ \text{سن رضا} \Rightarrow \text{سن خواهرش} = x + 2 = 8 + 2 = 10 \end{cases}$$

کاربرد معادلهٔ درجه‌دوم در حل مسائل سود

در ابتدا خوب است با یک سری نمادها آشنا شوید:

تعداد کالاها: x

قیمت هر کالا: p یا v

تابع سود: $P(x)$

تابع درآمد: $R(x)$

تابع هزینه: $C(x)$

تابع درآمد هر شرکت یا کارخانه از رابطهٔ $\boxed{R(x) = x.p}$ به دست می‌آید. ضمناً تابع هزینه برابر است با:

$$\boxed{C(x) = \underset{(\text{تولید})}{\text{هزینهٔ متغیر}} + \underset{(\text{اولیه})}{\text{هزینهٔ ثابت}}}$$

مثلاً اگر گفته شود هزینهٔ ثابت ۲۰۰۰ تومان و هزینهٔ تولید هر کالا ۱۰ تومان است، آن‌گاه: (همیشه x را باید در هزینهٔ تولید هر کالا ضرب کنید.) $C(x) = 2000 + 10x$

تابع سود هم برابر است با: $\boxed{P(x) = R(x) - C(x)}$

سود شرکت وقتی ماکزیمم است که تعداد کالاهای تولیدی‌اش برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ باشد. (معادلهٔ سود همیشه به شکل $P(x) = ax^2 + bx + c$ تبدیل می‌شود.) ضمناً اگر معادلهٔ $P(x) = 0$ را حل کنیم نقاط سربه‌سر به دست می‌آیند.

نقاط سربه‌سر

نقاط سربه‌سر تعداد کالاهایی است که به ازای تولید آن‌ها شرکت نه سود می‌کند و نه ضرر. پس از حل معادلهٔ $P(x) = 0$ معمولاً ۲ جواب به دست می‌آید (آن‌ها را m و n فرض می‌کنیم). حال اگر شرکت به اندازهٔ x کالا تولید کند و $m < x < n$ باشد سوددهی خواهد داشت. (با فرض $m < n$)

مثال: معادلات (توابع) درآمد و هزینه در شرکتی به صورت $R(x) = \frac{-1}{4}x^2 + 30x$ و $C(x) = 18x + 80$ می‌باشند:

الف) تابع سود را تشکیل داده و مشخص کنید به ازای تولید چه تعداد کالا، سود شرکت ماکزیمم می‌شود؟

ب) بیشترین مقدار سود شرکت چه‌قدر است؟

پ) نقاط سربه‌سر را محاسبه کنید. (نقاطی که در آن‌ها شرکت نه سود می‌کند نه ضرر)

ت) این شرکت چه تعداد کالا تولید کند تا سوددهی داشته باشد؟

حل

الف و **ب** تابع سود $P(x)=R(x)-C(x)=(\frac{-1}{4}x^2+30x)-(18x+80)=$

$$\frac{-1}{4}x^2+30x-18x-80=\underset{a}{\frac{-1}{4}}x^2+\underset{b}{12}x-80$$

تعداد کالاهایی که سود را ماکزیمم می‌کند. $\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\cancel{12}^{\,6}}{\cancel{2}(-\frac{1}{4})}=24$

$$P(x)=\frac{-1}{4}x^2+12x-80\xrightarrow{x=24}$$

$$\text{سود ماکزیمم}=\underbrace{(\frac{-1}{\cancel{4}}\times\cancel{24}^{\,6}\times 24)}_{-144}+\underbrace{(12\times 24)}_{288}-80=64$$

پ $P(x)=0\Rightarrow\frac{-1}{4}x^2+12x-80=0\xrightarrow{\text{حل به روش }\Delta}x=8, x=40$

یعنی اگر شرکت ۸ کالا یا ۴۰ کالا تولید کند، نه سود کرده و نه ضرر.

ت اگر شرکت به اندازهٔ $8<x<40$ کالا تولید کند سوددهی خواهد داشت.

نکتهٔ مهم گاهی اوقات رابطه‌ای به ما داده می‌شود که شامل x و p است. به این رابطه، معادلهٔ تقاضا می‌گوییم. *(البته کتاب درسی، اسمی برای این رابطه ذکر نکرده ولی بدونید که اسمش معادلهٔ تقاضا است.)* همیشه از این رابطه p را برحسب x پیدا کرده و آن را در معادلهٔ $R(x)=x.p$ قرار می‌دهیم تا تابع درآمد به دست آید.

مثال **در یک شرکت، تابع تقاضا برای نوعی کالا به صورت $x=200-2p$ می‌باشد. تابع (معادلهٔ) درآمد شرکت را به دست آورید.**

حل $x=200-2p\Rightarrow 2p=-x+200\xrightarrow{\div 2}p=\frac{-1}{2}x+100$

تابع درآمد $R(x)=x.p=x(\frac{-1}{2}x+100)=\frac{-1}{2}x^2+100x$

معادلات گویا

برای حل معادلاتی که شامل عبارت‌های گویا هستند دو حالت کلی وجود دارد. اگر معادله به شکل $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ بود کافی است طرفین‌وسطین کرده، معادلهٔ حاصل را حل کنیم ولی اگر معادله به شکل $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ نبود، ابتدا تمام مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه کرده سپس در کسرهایی که با هم جمع و تفریق شده‌اند، مخرج‌مشترک گرفته و سپس طرفین‌وسطین می‌کنیم. فقط دقت کنید که جواب یا جواب‌های به دست آمده نباید هیچ مخرجی را در معادلهٔ اصلی، به صفر تبدیل کنند وگرنه قابل قبول نیستند.

به عنوان مثال می‌خواهیم معادلات گویای زیر را حل کنیم:

مثال ۱ $\frac{x-1}{2x}=\frac{x+1}{3}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}2x(x+1)=3(x-1)$

$$\Rightarrow 2x^2+2x=3x-3\Rightarrow 2x^2-x+3=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac$$

$$=(-1)^2-4(2)(3)=1-24=-23$$

چون Δ منفی شده معادله جواب ندارد.

مثال ۲ $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3\Rightarrow\frac{x^2+x-2}{x(x-2)}=3\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}$

$$x^2+x-2=3x(x-2)\Rightarrow x^2+x-2=3x^2-6x$$

$$\Rightarrow 2x^2-7x+2=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=49-16=33$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x'=\frac{7+\sqrt{33}}{4} & (\text{ق ق})\\ x''=\frac{7-\sqrt{33}}{4} & (\text{ق ق})\end{cases}$$

کاربرد معادلات گویا در حل مسائل توصیفی

یک راه حل کلی برای حل مسائل گویا وجود ندارد، پس با توجه به شرایط مسئله، یک معادلهٔ مناسب تشکیل می‌دهیم. فقط این نکته را بدانید که اگر فردی کاری را در مدت زمان a، فرد دیگری همان کار را در مدت زمان b انجام دهد، این دو نفر همان کار را با هم در مدت زمان t انجام خواهند داد که t برابر است با: $t=\frac{a\times b}{a+b}$

مثال **دو نقاش A و B اگر کاری را با هم انجام دهند، کار در ۱۲ ساعت تمام می‌شود. نقاش A به تنهایی می‌تواند همان کار را ۱۰ ساعت زودتر از نقاش B تمام کند. مشخص کنید هر کدام به تنهایی در چند ساعت می‌توانند کار را تمام کنند؟**

حل اگر زمان نقاش A را x فرض کنیم، زمان نقاش B برابر $(x+10)$ خواهد بود؛ لذا:

$$t=\frac{ab}{a+b}\Rightarrow 12=\frac{x(x+10)}{x+x+10}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}x^2+10x=12(2x+10)$$

$$\Rightarrow x^2+10x-24x-120=0\Rightarrow\underbrace{x^2-14x-120=0}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}\Rightarrow(x-20)(x+6)=0$$

$$\begin{cases}x=20\ \text{ساعت}\ (\text{زمان نقاش }A)\Rightarrow \text{زمان نقاش }B=x+10=20+10=30\ \text{ساعت}\\ x=-6\ (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

مثال **مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی $\frac{3}{4}$ است. هر دو عدد را به دست آورید. (با تشکیل معادله)**

حل این دو عدد را می‌توانیم x و $x+2$ فرض کنیم. (اختلاف دو عدد زوج متوالی ۲ است.)

$$\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{x+2+x}{x(x+2)}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4(2x+2)=3x(x+2)\Rightarrow 8x+8=3x^2+6x\Rightarrow 3x^2-2x-8=0$$

$$\Rightarrow\Delta=4+96=100\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{100}}{2(3)}=\frac{2\pm 10}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow\text{عدد زوج بعدی}=4\\ x=\frac{-8}{6}\ (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

فصل ۲: تابع

مفهوم زوج مرتب و رابطه

مفهوم زوج مرتب به هر دو شیئ یا دو عدد که با ترتیب خاصی کنار هم قرار گیرند زوج مرتب می‌گوییم. در زوج مرتب (a,b) به a عضو اول و به b عضو دوم می‌گوییم. دقت کنید که در حالت کلی $(a,b)\neq(b,a)$. دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) در صورتی با هم مساوی‌اند که $a=c$ و $b=d$ باشد.

مثال **اگر زوج‌مرتب‌های $(x+3y,3)$ و $(1,y-x)$ مساوی باشند x و y را به دست آورید.**

حل

$$\begin{cases}\cancel{x}+3y=1\\ y-\cancel{x}=3\end{cases}$$

$$4y=4\Rightarrow y=1, y-x=3\xrightarrow{(y=1)}1-x=3\Rightarrow x=-2$$

مفهوم رابطه یک رابطه مثل R عضوهای یک مجموعه مثل A را به عضوهای یک مجموعهٔ دیگر مثل B مربوط می‌کند. اگر عضوهای رابطه را به شکل زوج مرتب‌های (a,b) نمایش دهیم، $a\in A$ و $b\in B$ خواهد بود. رابطه را به حالت‌های مختلف نمایش می‌دهیم. مثال‌های زیر همگی، یک رابطه را مشخص می‌کنند:

۱) نمایش جدولی

R:

x	−2	−1	0	3
y	4	1	0	9

۲) نمایش زوج‌مرتبی

$$R=\{(\underset{x}{-2},\underset{y}{4}),(-1,1),(0,0),(3,9)\}$$

۳) نمودار ون (پیکانی)