فهرست

فصل ۱

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

اعداد صحیح

۱- گزینه ۲ موارد داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

الف) بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی، عدد -۱ است؛ پس این مورد درست است.

ب) عدد صفر نه مثبت است و نه منفی، پس این قسمت نادرست است.

پ) قرینهٔ هر عدد منفی برابر با یک مقدار مثبت است، (که از خودش بزرگ‌تر است) لذا این قسمت نیز نادرست است.

ت) این مورد نادرست است؛ زیرا دو برابر اعداد منفی از خودشان کوچک‌تر است.

بنابراین فقط مورد (الف) درست است.

۲- گزینه ۴ ابتدا عددی که به مرکز دایرهٔ کوچک یعنی M نسبت داده‌شده را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ M تا P را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \frac{(-۷)+۳}{۲} = -۲ \qquad (\text{M مرکز دایره است.})$$

پس شعاع دایرهٔ کوچکِ سمت راست برابر با $-۲-(-۷)=۵$ است؛ بنابراین شعاع دایرهٔ کوچک سمت چپ نیز ۵ است؛ پس:

$$P = -۲۳ - ۵ = -۲۸$$

پس:

$$\text{فاصلهٔ M تا P} = -۲-(-۲۸)=۲۶$$

۳- گزینه ۲ منظور از حاصل‌جمع حاصل‌ضرب دوبه‌دوی سه عدد a، b و c عبارت روبه‌رو است:

$$ab+ac+bc \qquad (*)$$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) اگر هر سه عدد منفی باشند، آن‌گاه مقدار (*) مثبت است (زیرا هر کدام از حاصل‌ضرب‌ها مثبت هستند).

گزینهٔ (۲) اگر دو عدد مثبت و یک عدد منفی باشد (مثلاً a و b مثبت و c منفی)، آن‌گاه عبارت $\underbrace{ab}_{\text{مثبت}}+\underbrace{bc}_{\text{منفی}}+\underbrace{ac}_{\text{منفی}}$ امکان دارد منفی باشد. (دقت کنید که (*) همواره منفی نیست، حاصل (*) منفی شده، می‌خواهیم بررسی کنیم در چه حالتی منفی‌بودن حاصل عبارت، امکان‌پذیر است، که در این حالت این امکان وجود دارد.)

گزینهٔ (۳) اگر دو عدد منفی و یک عدد مثبت باشد، در این صورت حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است که این خلاف فرض مسئله است.

۴- گزینه ۳ تعداد اعداد صحیح بین a تا b برابر با $b-a-۱$ است؛ پس تعداد اعداد صحیح بین -۶۳ تا ۱۹ برابر است با: $۱۹-(-۶۳)-۱=۸۱$

۵- گزینه ۳ با توجه به این‌که دنباله به شکلی است که دوتا دوتا علامت عوض می‌شود، پس جای علامت سؤال، عددی با علامت منفی قرار می‌گیرد؛ هم‌چنین الگوی دنباله به شکل زیر است:

$$-۲=-۱\times۲$$
$$-۶=-۲\times۳$$
$$+۱۲=۳\times۴$$
$$+۲۰=۴\times۵$$
$$-۳۰=-۵\times۶$$

پس:

$$?=-۶\times۷=-۴۲$$

۶- گزینه ۲ ابتدا دنباله را تا چند عدد دیگر ادامه می‌دهیم، با این کار مشخص می‌شود که چند عدد مرتباً تکرار می‌شوند. با توجه به این اعداد، عدد هزارم را مشخص می‌کنیم. اگر اعداد دنباله را ادامه دهیم، داریم:

$$۱,۷,۶,-۱,-۷,-۶,۱,۷,۶,-۱,-۷,\ldots$$

مشخص است که ۶ عدد -۶، -۷، -۱، ۶، ۷ و ۱ مرتباً تکرار می‌شوند؛ پس:

$$۱۰۰۰ \div ۶ = ۱۶۶, \quad \text{باقی‌مانده} = ۴$$

هزارمین عدد، معادل چهارمین عدد از این دنباله یعنی عدد -۱ است.

۷- گزینه ۴ با توجه به سؤال قبل مشخص است که مجموع هر ۶ عدد از دنباله یعنی $۱,۷,۶,-۱,-۷,-۶$ برابر با صفر است؛ پس برای به دست آوردن مجموع هزار جملهٔ اول، کافی است مجموع ۴ جملهٔ اول این دنباله (زیرا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۰۰۰ بر ۶ برابر با ۴ می‌شود) را محاسبه کنیم:

$$\text{مجموع چهار جملهٔ اول} = ۱+۷+۶+(-۱)=۱۳$$

۸- گزینه ۲ می‌دانیم:

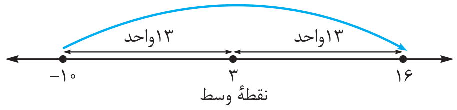
$$\text{طول بردار} = \text{انتهای بردار} - \text{ابتدای بردار} = -۲-۵=-۷$$

۹- گزینه ۴ با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\text{طول بردار} = ۱۰\times(+۲)=+۲۰ \qquad \text{ابتدای بردار} = -۶$$

$$\text{انتهای بردار} = \text{ابتدای بردار} + \text{طول بردار} = -۶+۲۰=+۱۴$$

۱۰- گزینهٔ ۳ بردار به شکل زیر است:



$$\text{طول بردار} = ۱۶ - (-۱۰) = ۲۶$$

۱۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر عددی فرد بار قرینه شود، برابر با قرینهٔ آن عدد می‌شود؛ اما قرینهٔ صفر خود صفر است و از آن‌جا که صفر یا غیرصفر بودن مقدار a مشخص نیست؛ پس حاصل را نمی‌توان مشخص کرد.

۱۲- گزینهٔ ۴ قرینهٔ عدد a نسبت به b برابر با $۲b - a$ است؛ پس:

$$\text{قرینهٔ ۷ نسبت به ۲} = ۲(۲) - (-۷) = ۴ + ۷ = ۱۱$$

۱۳- گزینهٔ ۲

$$\text{قرینهٔ ۳} = -۳ \quad \text{و} \quad ۳ + (-۸) = -۵$$

$$\text{قرینهٔ ۲ نسبت به ۳-} = ۲(-۳) - (۲) = -۶ - ۲ = -۸$$

۱۴- گزینهٔ ۳

$$\text{قرینهٔ قرینهٔ ۱-} = -۱$$

$$\text{قرینهٔ عدد ۵ نسبت به قرینهٔ قرینهٔ ۱-} = A = ۲(-۱) - ۵ = -۲ - ۵ = -۷$$

$$\text{قرینهٔ } A = ۷$$

$$\text{قرینهٔ } A \text{ نسبت به قرینهٔ } A = B = ۲(۷) - (-۷) = ۲۱ \Rightarrow \text{فاصلهٔ } A \text{ تا } B = ۲۱ - (-۷) = ۲۸$$

محاسبات در اعداد صحیح

۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا (با توجه به اولویت اعمال در محاسبات) از پرانتز درون کروشه شروع به محاسبه کرده و سپس مقدار کل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$۲ - \underbrace{(۵ - ۶)}_{-۱} - [-\underbrace{(-۶ - ۷)}_{-۱۳} - ۸] = ۲ + ۱ - \underbrace{[۱۳ - ۸]}_{۵} = ۳ - ۵ = -۲$$

۱۶- گزینهٔ ۲

$$۵ - ۴[۳ - ۲\underbrace{(۱ - ۲)^۴}_{+۱} + ۳] \times ۴ - ۵ = ۵ - ۴[۳ - ۲ + ۳] \times ۴ - ۵ = ۵ - ۴ \times ۴ \times ۴ - ۵ = -۶۴$$

۱۷- گزینهٔ ۴ با رعایت اولویت اعمال ریاضی در محاسبات، داریم:

$$-(-۱) + (۲ - (-۱)) \times ۳ - (-۴) \times ۱ - ۵ = ۱ + (۳) \times ۳ + ۴ \times ۱ - ۵ = ۱ + ۹ + ۴ - ۵ = ۹$$

۱۸- گزینهٔ ۲ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ (۱)}: ۱ + ۲ + ۳ = ۶ \quad , \quad ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶ \Rightarrow ۶ = ۶ \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ (۲)}: ۱ + ۲ + (-۳) = ۰ \quad , \quad ۱ \times ۲ \times (-۳) = -۶ \Rightarrow ۰ \neq -۶ \times$$

$$\text{گزینهٔ (۳)}: ۰ + (-۳) + ۳ = ۰ \quad , \quad ۰ \times (-۳) \times ۳ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰ \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ (۴)}: (-۱) + (-۲) + (-۳) = -۶ \quad , \quad (-۱)(-۲)(-۳) = -۶ \Rightarrow -۶ = -۶ \checkmark$$

۱۹- گزینهٔ ۴ از آخرین پرانتز محاسبات را شروع می‌کنیم:

$$(۱ - ۱) = ۰$$

$$۲ - ۲(۱ - ۱) = ۲ - ۲ \times ۰ = ۲$$

$$۳ - ۳(۲ - ۲(۱ - ۱)) = ۳ - ۳ \times ۲ = -۳$$

$$۴ - ۴(۳ - ۳(۲ - ۲(۱ - ۱))) = ۴ - ۴ \times (-۳) = ۱۶$$

$$۵ - ۵(۱۶) = ۵ - ۸۰ = -۷۵$$

$$۶ - ۶(-۷۵) = ۶ + ۴۵۰ = ۴۵۶$$

۲۰- گزینهٔ ۴ با رعایت اولویت اعمال در محاسبات داریم:

$$(-۲ \div (-۴ - ۴)) = -۲ \div (-۸) = \frac{۱}{۴}$$

پس:

$$۱۶ - ۱۶(-۲ \div (-۴ - ۴)) \div (-۱ - ۱) - ۱ = ۱۶ - ۱۶(\frac{۱}{۴}) \div (-۲) - ۱ = ۱۶ - ۴ \div (-۲) - ۱ = ۱۶ + ۲ - ۱ = ۱۷$$

۲۱- گزینهٔ ۱ با توجه به عبارت داده‌شده، یکی از پرانتزها به شکل $(۱۳۹۳ - ۱۳۹۳)$ یعنی مقدار صفر است؛ پس حاصل عبارت (با توجه به وجود عدد صفر در حاصل‌ضرب) برابر با صفر است.

۲۲- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که (-۱) به توان عددی زوج برابر با $+۱$ و به توان عددی فرد برابر با (-۱) است؛ داریم:

$$(-۱) + (-۱)^۲ + (-۱)^۳ + (-۱)^۴ + \cdots + (-۱)^{۹۹} = (-۱) + ۱ + (-۱) + ۱ + \cdots + (-۱) + ۱ + (-۱) = ۰ + ۰ + \cdots + ۰ + (-۱) = -۱$$

۲۳- گزینه ۱ ابتدا طرفین سه تساوی را با هم جمع کرده و سپس با توجه به آن، مقدار خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{rl} & a+b=-۱۱ \\ + & a+c=۱۷ \\ & b+c=-۱۶ \\ \hline & ۲a+۲b+۲c=-۱۰ \\ & ۲(a+b+c)=-۱۰ \\ & a+b+c=-۵ \end{array}$$

$$a+b+c=-۵ \xrightarrow{a+b=-۱۱} -۱۱+c=-۵ \Rightarrow c=-۵-(-۱۱)=۶$$

۲۴- گزینه ۳ اعداد درون جدول را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

a	b	c	d	e	f

پس: $a+b+c=b+c+d \Rightarrow a=d$

به همین ترتیب: $b=e \ , \ c=f$

پس سه عدد در این جدول مرتباً تکرار می‌شوند و با توجه به این‌که تعداد خانه‌های جدول ۱۲تا است؛ پس اولین عدد ۱۱− و آخرین عدد ۹ است.

اگر خانهٔ دوم را x بنامیم، داریم:

-۱۱	x	۹

$$-۱۱+x+۹=۵ \Rightarrow x=۷$$

۲۵- گزینه ۲

$$B-A=۰+(-۱)+(-۲)+\cdots+(-۹۹۹)-[(-۱)+(-۲)+\cdots+(-۱۰۰۰)]$$
$$=(-۱-(-۱))+(-۲-(-۲))+\cdots+(-۹۹۹-(-۹۹۹))-(-۱۰۰۰)=۰+۰+\cdots+۰+۱۰۰۰=۱۰۰۰$$

۲۶- گزینه ۱ اعداد ۱ تا ۳۱ قرینهٔ اعداد ۱− تا ۳۱− هستند و در جمع، یکدیگر را خنثی می‌کنند؛ لذا کافی است حاصل‌جمع اعداد ۳۲− تا ۴۵− را حساب کنیم:

$$-۴۵-۴۴-۴۳-\cdots-۳۲-۳۱-۳۰-\cdots-۱+۰+۱+\cdots+۳۱=-۴۵-۴۴-۴۳-\cdots-۳۲=A$$

تعداد اعداد باقی‌مانده برابر است با: $۴۵-۳۲+۱=۱۴$

پس: $A=۱۴\times\dfrac{(-۴۵+(-۳۲))}{۲}=-۵۳۹$

۲۷- گزینه ۳ ابتدا تعداد اعداد دنباله را به دست آورده و سپس با توجه به آن، مجموع خواسته‌شده را حساب می‌کنیم: $۶+۱۰+۱۴+\cdots+۱۲۲$

با توجه به این‌که فاصلهٔ هر دو عدد متوالی ۴ واحد است، داریم: $\text{تعداد}=\dfrac{۱۲۲-۶}{۴}+۱=۳۰$

پس: $۶+۱۰+۱۴+\cdots+۱۲۲=۳۰(\dfrac{۱۲۲+۶}{۲})=۱۹۲۰$

۲۸- گزینه ۲ ابتدا با دسته‌بندی مناسب مقدار هر دسته را به دست آورده و سپس با توجه به آن، حاصل عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$(۱-۸)+(۳-۱۰)+(۵-۱۲)+\cdots+(۴۰۱-۴۰۸)=(-۷)+(-۷)+\cdots+(-۷)$$

اما: $\text{تعداد پرانتزها}=\dfrac{۴۰۸-۸}{۲}+۱=۲۰۱$

پس: $\text{حاصل عبارت}=۲۰۱\times(-۷)=-۱۴۰۷$

۲۹- گزینه ۵ ابتدا مقدار هر پرانتز را حساب می‌کنیم، سپس حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$(۱-۲)-(۳-۴)-(۵-۶)-\cdots-(۹۹-۱۰۰)=(-۱)-(-۱)-(-۱)-\cdots-(-۱)=(-۱)+۱+۱+۱+\cdots+۱=(-۱)+(۴۹\times۱)=۴۸$$

۳۰- گزینه ۳ مقدار هر گزینه را به دست می‌آوریم:

گزینهٔ (۱): $(۱-۲)+(۳-۴)+(۵-۶)+\cdots+(۹۹-۱۰۰)=(-۱)+(-۱)+(-۱)+\cdots+(-۱)=۵۰\times(-۱)=-۵۰$

گزینهٔ (۲): $(۱+۳+۵+\cdots+۹۹)-(۲+۴+۶+\cdots+۱۰۰)=(۱-۲)+(۳-۴)+\cdots+(۹۹-۱۰۰)=-۵۰$

گزینهٔ (۳): $(۱۳+۱۵+\cdots+۱۱۳)-(۱۴+۱۶+۱۸+\cdots+۱۱۴)=(۱۳-۱۴)+(۱۵-۱۶)+\cdots+(۱۱۳-۱۱۴)$
$=(-۱)+(-۱)+\cdots+(-۱)=۵۱\times(-۱)=-۵۱$

گزینهٔ (۴): از راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر و الگویابی استفاده می‌کنیم:

$$۱-(۲-۳)=۲$$
$$۱-(۲-\underbrace{(۳-۴)}_{-۱})=۱-۳=-۲$$
$$۱-(۲-(۳-(۴-۵)))=۳$$
$$۱-(۲-(۳-(۴-(۵-۶))))=-۳$$

با این روند با توجه به این‌که در مراحل زوج مقدار عبارت منفی می‌شود؛ پس حاصل عبارت: $-۱۰۰\div۲=-۵۰$

۳۱- گزینه۴ با توجه به ساختار عبارت، مشخص است که مجموع هر ۴ عدد متوالی برابر با صفر است؛ یعنی: $1-2-4+5=0$

$7-8-10+11=0$

$\vdots$

اما تعداد این دسته‌های ۴تایی مشخص نیست. در عبارت A تمامی مضارب ۳ حذف شده است و بقیهٔ اعداد با علامت مثبت یا منفی ظاهر شده‌اند.

از طرفی: $\text{تعداد مضارب } 3 = \frac{1392-3}{3}+1=464$

پس کل اعداد به کار رفته در عبارت برابر است با: $1393-464=929$

از طرفی باقی‌ماندهٔ تقسیم ۹۲۹ بر ۴، برابر با ۱ است؛ یعنی A از تعدادی دسته که جمع آن‌ها برابر با صفر است و عدد ۱۳۹۳ ساخته شده است؛ به عبارت دیگر:

$$A=(1-2-4+5)+(7-8-10+11)+\cdots+(1387-1388-1390+1391)+1393=0+0+0\cdots+0+1393=1393$$

۳۲- گزینه۱ حاصل‌جمع اعداد هر سطر را محاسبه می‌کنیم و با توجه به آن، یک الگو برای حاصل‌جمع کل می‌یابیم: سطر اول: -1

سطر دوم: $(-1)+1=0$

سطر سوم: $(-1)+1+(-1)=-1$

سطر چهارم: $(-1)+1+(-1)+1=0$

$\vdots$

همان‌طور که مشخص است حاصل‌جمع اعداد سطرهای با شمارهٔ فرد برابر با -1 و سطرهای با شمارهٔ زوج برابر با صفر است؛ از طرفی تعداد سطرهای با شماره فرد از ۱ تا ۱۳۹۳ برابر است با: $\text{تعداد}=\frac{1393-1}{2}+1=697$

پس: $\text{حاصل‌جمع اعداد}=(-1)+0+(-1)+0+\cdots+0+(-1)=697\times(-1)=-697$

میانگین

۳۳- گزینه۱ ابتدای دمای شهر B را به دست آورده و سپس با توجه به میانگین دمای شهر A و B ، دمای شهر C را به دست می‌آوریم:

$\text{میانگین دمای شهر A و B}=\frac{12+(-8)}{2}=2$ ، $\text{دمای شهر B}=(+12)+(-20)=-8$

$\text{میانگین دمای سه شهر}=\frac{12+(-8)+11}{3}=5$ ، $\text{دمای شهر C}=2+9=11$

۳۴- گزینه۲ ابتدا مجموع اعداد را به دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع}=(-17)+(-16)+(-15)+\cdots+(-1)+0+1+\cdots+15+16+17+18+19+20=18+19+20=57$$

از طرفی تعداد این اعداد برابر است با: $20-(-17)+1=38$

پس: $\text{میانگین}=\frac{57}{38}=\frac{3}{2}=1/5$

۳۵- گزینه۱ فرض کنید این سه عدد عبارت‌اند از a، b و c.

با توجه به این‌که میانگین ۲تا از آن‌ها -21 است، پس مجموع این دو عدد برابر است با: $a+b=2\times(-21)=-42$

بنابراین: $\text{مجموع هر سه عدد}=-42+c=-17 \Rightarrow c=25$

۳۶- گزینه۲ با توجه به این‌که میانگین ۵ عدد برابر با -4 شده است؛ پس: $\text{مجموع}=5\times(-4)=-20$

از طرفی می‌خواهیم میانگین جدید (میانگین ۶ عدد) ۵ واحد بیشتر یعنی $-4+5=1$ شود؛ پس: $\text{مجموع ۶ عدد جدید}=6\times1=6$

پس عددی که باید به این اعداد اضافه شود برابر است با: $6-(-20)=26$

۳۷- گزینه ۴ می‌دانیم اگر میانگین چند عدد برابر M باشد، با اضافه‌کردن مقدار x به همهٔ آن اعداد اگر:

الف) $x > M$، میانگین اعداد جدید بیشتر از M می‌شود.

ب) $x = M$، میانگین اعداد جدید برابر با M می‌شود.

پ) $x < M$، میانگین اعداد جدید کوچک‌تر از M می‌شود.

با توجه به این‌که میانگین اعداد داده‌شده برابر است با:

$$\frac{۳+(-۱۷)+۹+۲+(-۷)}{۵}=-۲$$

پس با اضافه‌کردن عدد ۲− به هر کدام از اعداد، میانگین تغییری نمی‌کند.

چند سؤال دیگر از اعداد صحیح

۳۸- گزینه ۳ فرض کنید دو عدد مدنظر a و b باشند؛ پس:

الف) $۲a+۲b=۲(a+b)$ حاصل‌جمع، ۲ برابر می‌شود.

ب) $۲a-۲b=۲(a-b)$ اختلاف دو برابر می‌شود.

پ) $(۲a)(۲b)=۴(ab)$ حاصل‌ضرب، ۴ برابر می‌شود.

ت) $\frac{۲a}{۲b}=\frac{a}{b}$ حاصل تقسیم، ثابت است.

پس ۳ مورد از موارد ذکرشده درست هستند.

۳۹- گزینه ۴ عبارات داده‌شده به ازای مقادیری از q می‌تواند صحیح باشد که q شمارندهٔ عدد ۱۳۸۵ باشد؛ از طرفی تجزیهٔ عدد ۱۳۸۵ برابر است با:

$$۱۳۸۵=۵\times ۲۷۷$$

پس شمارنده‌های صحیح عدد ۱۳۸۵ عبارت‌اند از:

$$۱,-۱,۵,-۵,۲۷۷,-۲۷۷,۱۳۸۵,-۱۳۸۵$$

۴۰- گزینه ۱ ابتدا با تفکیک کسر، عبارت را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\frac{m^۲+۱۳۹۰}{m}=\frac{m^۲}{m}+\frac{۱۳۹۰}{m}=m+\frac{۱۳۹۰}{m}$$

واضح است که عبارت بالا به ازای مقادیری که در آن m شمارندهٔ ۱۳۹۰ است، مقداری صحیح می‌شود.

تجزیهٔ عدد ۱۳۹۰ عبارت است از:

$$۱۳۹۰=۲\times ۵\times ۱۳۹$$

پس تعداد شمارنده‌های مثبت آن برابر با $۸=۲\times ۲\times ۲$ و تعداد شمارنده‌های صحیح آن برابر با $۱۶=۲\times ۸$ است.

۴۱- گزینه ۴ برای این‌که حاصل کسر $\frac{۱۰۰}{۲n-۱}$ مقداری صحیح شود، $۲n-۱$ باید شمارنده‌های عدد ۱۰۰ باشد. شمارنده‌های عدد ۱۰۰ عبارت‌اند از:

$$۱,۲,۵,۱۰,۲۰,۲۵,۵۰$$

از طرفی با توجه به این‌که n عددی طبیعی است؛ پس $۲n-۱$ مقداری فرد است؛ لذا $۲n-۱$ فقط با اعداد ۱، ۵ و ۲۵ می‌تواند برابر باشد؛ یعنی n، ۳ مقدار می‌تواند داشته باشد.

۴۲- گزینه ۱ با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش این اعداد را باید پیدا کنیم. این اعداد عبارت‌اند از ۱، ۱، ۱ و ۲۶ که حاصل‌ضربشان از حاصل‌جمعشان کوچک‌تر است؛ پس سه عددی که مجموع آن‌ها ۲۸ است عبارت‌اند از: ۱، ۱ و ۲۶ و عدد چهارم، عدد یک است.

۴۳- گزینه ۳ اعداد منفی هر چه از صفر دورتر باشند (مقدار عددی آن‌ها بدون علامت بزرگ‌تر باشد)، مقدار کم‌تری دارند.

در بین گزینه‌ها، مقدار گزینهٔ (۳) (صرف‌نظر از علامت) از سایر گزینه‌ها بیشتر است؛ پس از همهٔ موارد کوچک‌تر است.

۴۴- گزینه ۳ از آن‌جا که x یک مقدار منفی است؛ پس مقدار عبارت ۲x− مثبت می‌شود که از سایر گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

۴۵- گزینه ۲ با حدس و آزمایش این حداقل مقدار عبارت است از:

$$۲\boxed{\times}۵\boxed{+}۷\boxed{\times}۸\boxed{+}۹\boxed{\times}۱=۷۵$$

۴۶- گزینه ۳ برای به دست آوردن بیشترین مقدار، باید علامت‌های تفریق را در سمت چپ اعداد منفی قرار دهیم تا قرینه و در نتیجه مثبت شوند؛ پس می‌توان گفت بیشترین مقدار برابر است با:

$$-۵\boxed{\times}-۶\boxed{\times}۳\boxed{-}-۹=۹۰+۹=۹۹$$

۴۷- گزینه ۲ محاسبات را از داخلی‌ترین پرانتز شروع می‌کنیم:

$$۱*۲=(۲\times ۱)-(۳\times ۲)-۵=-۹$$

$$((۱*۲)*۳)=(-۹*۳)=۲(-۹)-۳(۳)-۵=-۳۲$$

$$(((۱*۲)*۳)*(-۴))=(-۳۲)*(-۴)=۲(-۳۲)-۳(-۴)-۵=-۵۷$$

۴۸- گزینهٔ ۴ ابتدا تعداد حالات مختلفی که می‌توان ۶ را به صورت حاصل‌ضرب دو عدد صحیح نوشت، مشخص می‌کنیم و سپس با توجه به آن، مسئله را حل می‌کنیم:

۱) $۶=۱\times ۶$ ۲) $۶=۶\times ۱$ ۳) $۶=(-۱)\times(-۶)$ ۴) $۶=(-۶)\times(-۱)$

۵) $۶=۲\times ۳$ ۶) $۶=۳\times ۲$ ۷) $۶=(-۲)\times(-۳)$ ۸) $۶=(-۳)\times(-۲)$

پس برای a و b ، ۸ مقدار مختلف به دست می‌آید.

۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا عدد ۴۵ را به صورت ضرب ۵ عدد صحیح متفاوت می‌نویسیم: $۴۵=(۱)(-۱)(۳)(-۳)(۵)$

(که این حالت، منحصربه‌فرد است)، پس:

$۶-a=۱ \Rightarrow a=۵$ و $۶-b=-۱ \Rightarrow b=۷$ و $۶-c=۳ \Rightarrow c=۳$

$۶-d=-۳ \Rightarrow d=۹$ و $۶-e=۵ \Rightarrow e=۱$

بنابراین: $a+b+c+d+e=۵+۷+۳+۹+۱=۲۵$

۵۰- گزینهٔ ۱ در مسابقاتی به این شکل، مجموع تفاضل گل‌ها باید صفر شود؛ زیرا اگر تیمی تعدادی گل زده باشد، در مقابل، تیم دیگری همان مقدار گل خورده است؛ پس اگر تفاضل گل تیم ششم x باشد، داریم: $۱+۳+۴+(-۲)+(-۷)+x=۰ \Rightarrow x=۱$

۵۱- گزینهٔ ۱ از آن‌جا که در بین این اعداد، ۶ عدد را انتخاب کرده و به ۳ دسته تقسیم کرده‌ایم، پس مجموع آن‌ها باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در بین اعداد اگر ۵− را کنار بگذاریم مجموع اعداد باقی‌مانده برابر با $(-۹)+(-۴)+(-۳)+(-۱)+۰+۵=-۱۲$ می‌شود که بر ۳ بخش‌پذیر است؛ پس گزینهٔ (۱) پاسخ مسئله است.

۵۲- گزینهٔ ۴ هر حرکت را با یک عدد علامت‌دار نشان داده و سپس مجموع آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{(-۱)+۲}_{+۱}+\underbrace{(-۳)+۴}_{+۱}+\cdots\underbrace{(-۱۳۹۱)+۱۳۹۲}_{+۱}+(-۱۳۹۳)=۱+۱+\cdots+۱-۱۳۹۳=۶۹۶-۱۳۹۳=-۶۹۷$$

۵۳- گزینهٔ ۴ سعی می‌کنیم با حدس و آزمایش اعداد را حذف کنیم؛ مثلاً اگر روی فلش عدد ۵+ قرار گیرد، در این صورت $۱=۵+۴-$ می‌شود که عدد ۱+ در بین اعداد داده‌شده قرار نمی‌گیرد. با امتحان‌کردن همهٔ اعداد به جدول زیر می‌رسیم:

−۴	۹
۶	۱۱

$\xrightarrow{-۱}$

−۵	۸
۵	۱۰

۵۴- گزینهٔ ۱ ابتدا جدول را به شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم و سپس با توجه به الگوی داده‌شده مقدار * را به دست می‌آوریم:

	*		
	e	f	
c	−۱۱	d	
۱۰	a	b	۱۵

با توجه به سطر آخر می‌توان نوشت: $a+b=-۱۱$

هم‌چنین:

$$*=e+f=(c+(-۱۱))+((-۱۱)+d)=c+d-۲۲=(۱۰+a)+(b+۱۵)-۲۲=a+b+۲۵-۲۲=\underbrace{a+b}_{-۱۱}+۳=-۱۱+۳=-۸$$

۵۵- گزینهٔ ۳ از آن‌جا که مجموع اعداد سطر دوم و ستون اول برابر است؛ پس:

$y+\cancel{x}+۸=\cancel{x}+(-۱۳)+(-۷) \Rightarrow y+۸=-۲۰ \Rightarrow y=-۲۸$

هم‌چنین مجموع اعداد قطر اصلی و ستون اول برابر است؛ پس: $\cancel{y}+(-۱۳)+۴=\cancel{y}+x+۸ \Rightarrow -۹=x+۸ \Rightarrow x=-۱۷$

بنابراین: $x+y=(-۱۷)+(-۲۸)=-۴۵$

۵۶- گزینهٔ ۳ طبق الگوی زیر، پس از ۴ مرحله به جدول موردنظر می‌رسیم:

+۱	+۱	+۱
+۱	+۱	+۱
+۱	+۱	+۱

$\xrightarrow{\text{مرحلهٔ اول}}$

+۱	−۱	−۱
+۱	−۱	−۱
+۱	+۱	+۱

$\xrightarrow{\text{مرحلهٔ دوم}}$

−۱	+۱	−۱
−۱	+۱	−۱
+۱	+۱	+۱

$\xrightarrow{\text{مرحلهٔ سوم}}$

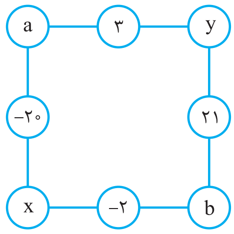
−۱	+۱	−۱
+۱	−۱	−۱
−۱	−۱	+۱

$\xrightarrow{\text{مرحلهٔ چهارم}}$

−۱	+۱	−۱
+۱	+۱	+۱
−۱	+۱	−۱

پس برای رسیدن به این جدول، تعداد مراحل حتماً مضرب ۴ است که در بین گزینه‌ها فقط ۱۳۹۲ مضرب ۴ است.

۵۷- گزینه ۱ ابتدا جدول را به شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:



پس:

$$\frac{a+y}{۲}=۳ \Rightarrow a+y=۶\ (۱)$$

$$\frac{y+b}{۲}=۲۱ \Rightarrow y+b=۴۲\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)-(۲)} (a+y)-(y+b)=۶-۴۲ \Rightarrow a-b=-۳۶$$

۵۸- گزینه ۳ همان‌طور که مشخص است اعداد ۴، ۸، ۲−، ۷ و صفر هر کدام در دو ضلع محاسبه می‌شوند؛ پس اگر مجموع اعداد داده‌شده را به دست آوریم با این تفاوت که اعداد ۴، ۸، ۲−، ۷ و صفر را دو بار حساب کنیم، مجموع ۶ ضلع ۳تایی به دست می‌آید. این مجموع برابر است با:

$$(-۴)+(-۳)+(-۲)+(-۱)+۰+۱+۲+۳+۴+۵+۷+۸+۱۱+(۴+۸+(-۲)+۷+۰)=۴۸$$

پس مجموع اعداد روی هر ضلع برابر است با: $\frac{۴۸}{۶}=۳$

در این صورت: $۷+a+(-۲)=۳ \Rightarrow a=-۲$

اعداد گویا

۵۹- گزینه ۴ مشخص است که اعداد طبیعی، صحیح و اول یا زوج هستند یا فرد، اما اعداد گویا با توجه به ساختاری که دارند (کسری‌بودن آن‌ها) زوج یا فرد بودن آن‌ها مطرح نمی‌شود.

۶۰- گزینه ۱ با توجه به این‌که $-\frac{۶}{۵}=-۱/۲$ و $\sqrt{۵}\sim ۲/۲$، پس فقط گزینهٔ (۱) می‌تواند در این محدوده قرار گیرد.

۶۱- گزینه ۲ عددهای صفر، $\sqrt{۴}=۲$ و $\frac{۲}{۳}$ گویا هستند.

۶۲- گزینه ۴ اعداد ۲، $-(-۳)$ و $\sqrt{۸۱}$ طبیعی، اعداد ۲، $-(-۳)$، $\sqrt{۸۱}$ و ۲۱− صحیح و اعداد ۲، $-(-۳)$، $\sqrt{۸۱}$، ۲۱−، $-\frac{۲}{۵}$ و ۱/۷− گویا هستند.

۶۳- گزینه ۲ می دانیم بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد که این بی‌شمار عدد را می‌توان با پیدا کردن کسر بین دو کسر نوشت.

۶۴- گزینه ۴ اعداد طبیعی در این محدوده، اعداد ۱ تا ۱۴ هستند که تعداد آن‌ها ۱۴تا است.

اعداد صحیح در این محدوده، اعداد ۱۳− تا ۱۴+ هستند که تعداد آن‌ها برابر است با: $۱۴-(-۱۳)+۱=۲۸$

تعداد اعداد گویا، در این محدوده بی‌شمار است.

۶۵- گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

گزینهٔ (۲) بین دو عدد $-\frac{۱}{۱۰۰}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ فقط عدد صحیح صفر وجود دارد؛ پس این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۳) بین دو عدد $-\frac{۱}{۱۰۰}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ هیچ عدد طبیعی وجود ندارد.

گزینهٔ (۴) همان‌طور که در گزینهٔ (۲) مطرح شد، فقط صفر در این فاصله به عنوان عدد صحیح وجود دارد.

۶۶- گزینه ۳ عدد $\frac{۲۹}{۴}$ عددی بین ۷ و ۸ است؛ پس قرینهٔ آن بین ۷− و ۸− قرار دارد.

۶۷- گزینه ۳ به جای این‌که حاصل تقسیم عدد a بر b را به دست آوریم کافی است a را در معکوس b یعنی $\frac{۱}{b}$ ضرب کنیم:

$$-(\frac{-۲}{-۸})=-(\frac{۲}{۸})=-\frac{۱}{۴}$$

پس به جای تقسیم بر $-\frac{۱}{۴}$ کافی است عدد موردنظر را در معکوس $-\frac{۱}{۴}$ یعنی ۴− ضرب کنیم.

۶۸- گزینه ۳ اعداد ۱ و ۱− با معکوسشان برابرند.

۶۹- گزینه ۴ عددی که از دو عدد دیگر به یک فاصله است، همان میانگین دو عدد است:

$$\frac{۲}{۵} \text{ و } \frac{۳}{۷} \text{ میانگین } = \frac{\frac{۳}{۷}+\frac{۲}{۵}}{۲}=\frac{\frac{۲۹}{۳۵}}{۲}=\frac{۲۹}{۷۰}$$

۷۰- گزینهٔ۲ از آن‌جا که فاصلهٔ هر دو عدد متوالی یکسان است، ابتدا فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ تا $\frac{۱}{۲}$ را به دست آورده و با تقسیم‌کردن این مقدار بر ۳، این فاصلهٔ مساوی را به دست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

$$\text{فاصلهٔ بین هر دو عدد}=\frac{۱}{۶}\div ۳=\frac{۱}{۱۸}$$

پس:

$$b=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۷}{۱۸}$$

۷۱- گزینهٔ۱ با توجه به این‌که فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ تا $\frac{۱}{۵}$ به ۱۶ قسمت مساوی تقسیم شده است، ابتدا اندازهٔ هر قسمت را به دست آورده و سپس با توجه به آن مشخص می‌کنیم کدام نقطه نشانگر عدد $\frac{۱}{۴}$ است.

$$\text{فاصلهٔ } \frac{۱}{۵} \text{ تا } \frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۵}$$

$$\text{اندازهٔ هر قسمت}=\frac{۲}{۱۵}\div ۱۶=\frac{۲}{۱۵}\times\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{۱۲۰}$$

$$\text{نقطهٔ } a=\frac{۱}{۵}+(۶\times\frac{۱}{۱۲۰})=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۰}=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

کسرهای مساوی و مقایسهٔ دو کسر

۷۲- گزینهٔ۳ با توجه به تساوی دو کسر می‌توان گفت هر مضربی و هر ترکیبی از این دو کسر با هم برابرند؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{۲a}{۲b}=\frac{۳c}{۳d}=\frac{۲a+۳c}{۲b+۳d}$$

۷۳- گزینهٔ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم و سپس عددی را که باید در صورت و مخرج کسر ضرب شود، می‌یابیم:

$$\frac{۱۰۲}{۱۱۹}\underset{\div ۱۷}{\overset{\div ۱۷}{=}}\frac{۶}{۷}\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب صورت و مخرج}=۶\times ۷=۴۲$$

$$k^{۲}=\frac{۱۶۸}{۴۲}=۴\Rightarrow k=۲$$

پس کسر موردنظر برابر است با:

$$\frac{۶}{۷}\underset{\times ۲}{\overset{\times ۲}{=}}\frac{۱۲}{۱۴}$$

۷۴- گزینهٔ۳ ابتدا کسر را ساده می‌کنیم و سپس عددی که باید در صورت و مخرج کسر ضرب شود را می‌یابیم:

$$\frac{۸۴}{۱۱۹}\underset{\div ۷}{\overset{\div ۷}{=}}\frac{۱۲}{۱۷}\Rightarrow \text{اختلاف صورت و مخرج}=۱۷-۱۲=۵$$

$$k=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

پس کسر موردنظر برابر است با:

$$\frac{۱۲}{۱۷}\underset{\times ۵}{\overset{\times ۵}{=}}\frac{۶۰}{۸۵}$$

۷۵- گزینهٔ۳ ابتدا کسر را ساده کرده و سپس با توجه به شرایطی که مسئله خواسته تعداد کسرهای مدنظر را می‌یابیم:

$$\frac{۱۶}{۶۸}=\frac{۴}{۱۷}$$

با توجه به این‌که صورت کسر بزرگ‌تر از ۱۰۰ باید باشد، پس عدد ۴ باید حداقل در ۲۶ و برای این‌که مخرج کسر کم‌تر از ۵۵۰ باشد، عدد ۱۷ حداکثر باید در ۳۲ ضرب شود.

پس:

$$\text{اولین کسر}=\frac{۴}{۱۷}\underset{\times ۲۶}{\overset{\times ۲۶}{=}}\frac{۱۰۴}{۴۴۲}$$

$$\text{آخرین کسر}=\frac{۴}{۱۷}\underset{\times ۳۲}{\overset{\times ۳۲}{=}}\frac{۱۲۸}{۵۴۴}$$

که تعداد این کسرها برابر است با:

$$۳۲-۲۶+۱=۷$$

۷۶- گزینهٔ۲ فرض کنید عدد موردنظر برابر با x باشد؛ پس:

$$\frac{۸-x}{۱۱-x}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳(۸-x)=۲(۱۱-x)\Rightarrow ۲۴-۳x=۲۲-۲x\Rightarrow -x=-۲\Rightarrow x=۲$$

۷۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید صورت کسر اول برابر با a و صورت کسر دوم برابر با b باشد؛ پس:

$$\frac{a}{۴}+\frac{b}{۶}=\frac{۳a+۲b}{۱۲}=\frac{p}{q}$$

از آن‌جا که $\frac{p}{q}$ یک کسر ساده‌نشدنی است، پس حداکثر مقداری که q می‌تواند داشته باشد برابر با ۱۲ است؛ یعنی q می‌تواند ۱۲ یا شمارنده‌های ۱۲ باشد.

۷۸- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر دو کسر با هم برابر باشند، آن‌گاه هر ترکیبی از آن‌ها نیز با هم برابرند؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

از طرفی:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+۱۴}{b+۳۵}=\frac{-a}{-b}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+۱۴-a}{b+۳۵-b}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۴}{۳۵}=\frac{۲}{۵}$$

از آن‌جا که بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک a و b برابر با یک است، پس:

$$a=۲\ ,\ b=۵\Rightarrow a+b=۷$$

۷۹- گزینهٔ ۳ کسرهای $\frac{۷}{۱۵}$، $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۴}{۹}$ از کسر $\frac{۱}{۲}$ کوچک‌تر هستند؛ اما کسر $\frac{۶}{۱۱}$ از $\frac{۱}{۲}$ بزرگ‌تر است؛ پس بزرگ‌ترین کسر برابر با $\frac{۶}{۱۱}$ است.

۸۰- گزینهٔ ۴ در بین کسرهایی که صورت آن‌ها یک واحد از مخرج آن‌ها کم‌تر است، کسری بزرگ‌تر است که عدد صورت و مخرج آن بیشتر باشد؛ پس کسر $\frac{۱۰۰۰۰۱}{۱۰۰۰۰۲}$ از همه بزرگ‌تر است.

۸۱- گزینهٔ ۱ برای حل این سوال به دو مطلب باید توجه داشته باشید:

الف) با توجه به این‌که a عددی منفی است، پس توان‌های زوج آن مثبت و توان‌های فرد آن منفی است؛ پس کوچک‌ترین مقدار از بین توان‌های فرد a باید انتخاب شود.

ب) با توجه به این‌که a عددی بین صفر و ۱− است، پس هر چه توان آن کم‌تر باشد از صفر دورتر می‌شود و مقدار آن کم‌تر می‌شود (اعداد منفی هر چه از صفر دورتر باشند کوچک‌ترند).

پس می‌توان گفت کوچک‌ترین مقدار بین آن‌ها، عدد a است.

۸۲- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که $۱>\frac{a}{b}>۰$، پس معکوس $\frac{a}{b}$ بزرگ‌تر از یک است؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{b}{a}>۱$$

۸۳- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر کسری بین صفر و یک باشد و مقدار یکسانی به صورت و مخرج آن اضافه کنیم مقدار کسر بزرگ‌تر شده و به عدد یک نزدیک می‌شود. از طرفی:

$$a<b\Rightarrow\frac{a}{b}<۱$$

پس: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$.

۸۴- گزینهٔ ۴ این سؤال را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

الف) اگر کسر بین صفر و یک باشد، با اضافه‌کردن مقداری ثابت، مقدار کسر بزرگ‌تر می‌شود.

$$\frac{۱}{۲}<\frac{۱+۱}{۲+۱}=\frac{۲}{۳}$$

ب) اگر کسر برابر با واحد باشد، مقدار کسر تغییر نمی‌کند.

$$۱=\frac{۱}{۱}=\frac{۱+a}{۱+a}$$

پ) اگر کسر بزرگ‌تر از یک باشد، مقدار کسر کوچک‌تر می‌شود.

$$\frac{۳}{۲}>\frac{۳+۱}{۲+۱}=\frac{۴}{۳}$$

پس هر سه حالت امکان دارد اتفاق بیفتد.

۸۵- گزینهٔ ۱ سعی می‌کنیم همهٔ گزینه‌ها را برحسب کسر $\frac{۲}{۵}$ بنویسیم و با توجه به آن، نزدیک‌ترین کسر را به دست می‌آوریم:

گزینهٔ (۱): $\frac{۳۹۹}{۱۰۰۰}=\frac{۴۰۰}{۱۰۰۰}-\frac{۱}{۱۰۰۰}=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۱۰۰۰}$

گزینهٔ (۲): $\frac{۱۹۹}{۵۰۰}=\frac{۲۰۰}{۵۰۰}-\frac{۱}{۵۰۰}=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۵۰۰}$

گزینهٔ (۳): $\frac{۴۱}{۱۰۰}=\frac{۴۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۱۰۰}$

گزینهٔ (۴): $\frac{۲۱}{۵۰}=\frac{۲۰}{۵۰}+\frac{۱}{۵۰}=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۵۰}$

گزینهٔ (۵): $\frac{۳۹}{۱۰۰}=\frac{۴۰}{۱۰۰}-\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۱۰۰}$

در بین گزینه‌ها، عدد گزینهٔ (۱) کم‌ترین اختلاف را تا کسر $\frac{۲}{۵}$ دارد.

۸۶- گزینه ۴ می‌دانیم هر چه مخرج کسر بزرگ‌تر باشد، (صورت‌ها مساوی) مقدار کسر کوچک‌تر می‌شود.

واضح است که: $2009 < 2009 + \frac{1}{2009}$

پس:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2009} > \dfrac{1}{2009+\frac{1}{2009}} \\ 2009 = 2009 \end{array}\right\} \Rightarrow 2009+\frac{1}{2009} > 2009+\dfrac{1}{2009+\frac{1}{2009}} \quad (*)$$

یعنی: $A > B$.

با توجه به (*): $\dfrac{1}{2009+\frac{1}{2009}} < \dfrac{1}{2009+\dfrac{1}{2009+\frac{1}{2009}}}$، پس $C > B$، بنابراین $A > C > B$.

کسر بین دو کسر

۸۷- گزینه ۳ مشخص است که $\frac{19}{10} < \frac{19}{9} < \frac{19}{8}$ قرار دارد.

۸۸- گزینه ۴ با بررسی گزینه‌ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{7} = \frac{20}{35} \\ \frac{3}{5} = \frac{21}{35} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$$

پس $\frac{4}{7}$ بین این دو کسر وجود ندارد.

۸۹- گزینه ۳ می‌خواهیم این ۱۱ کسر را با روش مخرج‌مشترک‌گیری بنویسیم.

ابتدا مخرج‌مشترک می‌گیریم: $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$

از آن‌جا که می‌خواهیم ۱۱ کسر بین دو کسر بنویسیم کافی است صورت و مخرج هر دو کسر را در ۱۲ ضرب کنیم:

$$\frac{15}{20} \overset{\times 12}{=} \frac{180}{240}, \quad \frac{16}{20} \overset{\times 12}{=} \frac{192}{240} \xrightarrow{\text{کسرهای موردنظر}} \frac{181}{240}, \frac{182}{240}, \dots, \frac{191}{240}$$

پس عدد ۳ یک بار در ۵ و یک بار در ۱۲ یعنی در $60 = 12 \times 5$ ضرب شده است.

۹۰- گزینه ۲ ابتدا صورت دو کسر را یکسان می‌کنیم و سپس با توجه به مخرج جدید، تعداد آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{5} = \frac{75}{125} \\ \frac{5}{6} = \frac{75}{90} \end{array} \Rightarrow \text{کسرهای موردنظر} = \frac{75}{124}, \frac{75}{123}, \dots, \frac{75}{91}$$

پس تعداد این کسرها برابر است با: $124 - 91 + 1 = 34$

۹۱- گزینه ۳ با توجه به این‌که ۵ و ۸ هم‌زمان هر دو بر ۱۰۰ بخش‌پذیر نیستند، مخرج‌مشترک بین آن‌ها را $200 = [8,5,100]$ در نظر می‌گیریم و سپس از بین آن‌ها، کسرهایی که مخرج آن‌ها به ۱۰۰ تبدیل می‌شود را انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} \frac{7}{8} = \frac{175}{200} \\ \frac{7}{5} = \frac{280}{200} \end{array} \Rightarrow \text{کسرهای با مخرج ۲۰۰} = \frac{176}{200}, \frac{177}{200}, \dots, \frac{279}{200}$$

در بین کسرهای بالا، کسرهایی که صورت آن‌ها زوج است قابل‌قبول‌اند (چون مخرج آن‌ها بعد از تقسیم بر ۲، به ۱۰۰ تبدیل می‌شود)؛ پس کسرهای موردنظر عبارت‌اند از: $\frac{176}{200}, \frac{178}{200}, \dots, \frac{278}{200}$

که تعداد آن‌ها برابر است با: $\frac{278-176}{2} + 1 = 52$

۹۲- گزینه ۲ ابتدا صورت دو کسر را با ضرب عدد مناسب به ۶۰ تبدیل می‌کنیم و با توجه به عدد مخرج‌ها در مورد تعداد بحث می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = \frac{60}{36} \\ \frac{4}{5} = \frac{60}{75} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{کسرهای موردنظر} = \frac{60}{74}, \frac{60}{73}, \dots, \frac{60}{37}$$

پس تعداد این کسرها برابر است با: $74 - 37 + 1 = 38$

۹۳- گزینه ۱ این کسر را با جمع‌کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{3}=\frac{5}{15}<\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{5}{15}<\frac{5+2}{15+5}<\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{5}{15}<\frac{7}{20}<\frac{2}{5}$$

۹۴- گزینه ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\frac{2}{\sqrt{1000000}}=\frac{2}{1000}\Rightarrow \frac{1}{1000}<\frac{2}{1000}<\frac{1}{100}$ ✓

گزینهٔ (۲): $\frac{1}{1000}<\frac{1}{250}=\frac{4}{1000}<\frac{1}{100}$ ✓

گزینهٔ (۳): $2\times 10^{-4}=\frac{2}{10^{4}}=\frac{2}{10000}<\frac{1}{1000}$ ×

گزینهٔ (۴): $1/2\times 10^{-3}=\frac{1/2}{10^{3}}=\frac{1/2}{1000}\Rightarrow \frac{1}{1000}<\frac{1/2}{1000}<\frac{1}{100}$ ✓

۹۵- گزینه ۳

$$\frac{20009}{20008}\sim 1/00004 \qquad \frac{2009}{2008}\sim 1/0004$$

پس:

$$1/00004<1/0001<1/0004$$

۹۶- گزینه ۳ به جای عدد ۱ از مقدار $\frac{a}{a}$ استفاده می‌کنیم:

$$1<a\Rightarrow \frac{a}{a}<\frac{a}{1}\Rightarrow \frac{a}{a}<\frac{a+a}{a+1}<\frac{a}{1}\Rightarrow 1<\frac{2a}{a+1}<a$$

۹۷- گزینه ۱ با توجه به صورت سؤال:

$$1/5=\frac{15}{10}<\frac{b}{11},\frac{c}{b},\frac{c}{15}<\frac{18}{10}=1/8$$

اما:

$$\frac{15}{10}<\frac{b}{11}<\frac{18}{10}\xrightarrow{\times 11}\frac{165}{10}<b<\frac{198}{10}$$

پس: ۱۹ یا ۱۸ یا $b=17$.

هم‌چنین:

$$\frac{15}{10}<\frac{c}{15}<\frac{18}{10}\xrightarrow{\times 15}\frac{225}{10}<c<\frac{270}{10}$$

پس: ۲۶ یا ۲۵ یا ۲۴ یا $c=23$.

از طرفی $1/5<\frac{c}{b}<1/8$، پس فقط $c=26$ و $b=17$ قابل‌قبول است، بنابراین:

$$b+c=26+17=43$$

محاسبات در اعداد گویا

۹۸- گزینه ۴

$$-1\frac{1}{5}+\frac{1}{5}[3\frac{1}{2}-(-\frac{2}{3})]=-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}[\frac{7}{2}+\frac{2}{3}]=-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}[\frac{25}{6}]=-\frac{6}{5}+\frac{5}{6}=\frac{-36+25}{30}=-\frac{11}{30}$$

۹۹- گزینه ۲ با توجه به این‌که در صورت و مخرج هر کسر، کسرهایی با مخرج ۱۰۰ ظاهر می‌شود، برای سهولت در محاسبات، صورت و مخرج هر دو کسر را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1/01-\frac{1}{5}}{3\frac{1}{2}-0/8}\times\frac{3-0/24}{1-0/31}=\frac{\frac{101}{100}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{2}-\frac{8}{10}}\times\frac{3-\frac{24}{100}}{1-\frac{31}{100}}$$

با ضرب صورت و مخرج هر دو کسر در ۱۰۰ داریم:

$$\text{عبارت}=\frac{101-20}{350-80}\times\frac{300-24}{100-31}=\frac{\cancel{81}^{\,3}}{\cancel{270}_{\,10}}\times\frac{\cancel{276}^{\,4}}{\cancel{69}_{\,1}}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

۱۰۰- گزینه ۱ با رعایت اولویت اعمال ریاضی در محاسبات مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$3-3[\frac{3}{4}(1-3)^{2}-(24\div 2)+6]=3-3[\frac{3}{4}\times 4-(12)+6]=3-3[3-6]=3-3\times(-3)=3+9=12$$

۱۰۱- گزینه ۳ اگر کمی دقت کنید، صورت دو کسر اصلی مثل هم است ولی مخرج آن‌ها قرینه هم است. پس حاصل عبارت برابر با صفر است؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}+\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=0$$

۱۰۲- گزینه ۱ ابتدا هر عدد مخلوط را به شکل ساده‌تر می‌نویسیم و سپس حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$0\frac{1}{3}-2\frac{0}{6}+\frac{1}{2}-0\times 2-2\frac{-2}{-3}=\frac{1}{3}-2+\frac{1}{2}-0-\frac{8}{3}=-\frac{23}{6}$$

۱۰۳- گزینهٔ ۳ ابتدا تساوی داده‌شده در فرض مسئله را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم: $\frac{x}{y} \div \frac{e}{f} = ۱ \Rightarrow \frac{x}{y} \times \frac{f}{e} = ۱ \Rightarrow \frac{xf}{ye} = ۱ \Rightarrow \frac{ye}{xf} = ۱$

پس:

$$\frac{(\frac{f}{e} \times \frac{x}{y})^{۱۰۰۰۰}}{۱۰۰۰۰^{(\frac{y}{x} \times \frac{e}{f})}} = \frac{(\frac{fx}{ey})^{۱۰۰۰۰}}{۱۰۰۰۰^{\frac{ye}{xf}}} = \frac{۱^{۱۰۰۰۰}}{۱۰۰۰۰^{۱}} = \frac{۱}{۱۰۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰^{۴}} = ۱۰^{-۴}$$

۱۰۴- گزینهٔ ۴ مقدار هر گزینه را به دست می‌آوریم، سپس با هم مقایسه می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $۱۰ \times ۰/۰۰۱ \times ۱۰۰ = ۱۰ \times \frac{۱}{۱۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱$

گزینهٔ (۲): $۰/۰۱ \div ۱۰۰ = \frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰۰۰۰}$

گزینهٔ (۳): $۱۰۰ \div ۰/۰۱ = ۱۰۰ \times \frac{۱۰۰}{۱} = ۱۰۰۰۰$

گزینهٔ (۴): $۱۰۰۰۰ \times ۱۰۰ \div ۱۰ = ۱۰۰۰۰۰۰ \div ۱۰ = ۱۰۰۰۰۰$

گزینهٔ (۵): $۰/۱ \times ۰/۰۱ \times ۱۰۰۰۰ = \frac{۱}{۱۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} \times ۱۰۰۰۰ = ۱۰$

پس مقدار عددی گزینهٔ (۴) از سایر موارد بزرگ‌تر است.

۱۰۵- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که مخرج کسرها برابر است، یکی از مخرج‌ها را نوشته سپس صورت‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۲}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰۰} + \cdots + \frac{۹۹}{۱۰۰} + ۱ = \frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۲}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰۰} + \cdots + \frac{۹۹}{۱۰۰} + \frac{۱۰۰}{۱۰۰} = \frac{۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰}{۱۰۰} = \frac{\frac{۱۰۰ \times ۱۰۱}{۲}}{۱۰۰} = \frac{۱۰۱}{۲} = ۵۰/۵$$

۱۰۶- گزینهٔ ۴ با توجه به دستورالعمل داده‌شده، ابتدا مقدار داخل پرانتز را محاسبه می‌کنیم، سپس مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{-\frac{۲}{۳}} - \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = -\frac{۳}{۲} - ۲ = -\frac{۷}{۲}$$

$$(-\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲}) \times (-\frac{۱}{۴}) = -\frac{۷}{۲} \times -\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{-\frac{۷}{۲}} - \frac{۱}{-\frac{۱}{۴}} = -\frac{۲}{۷} + ۴ = \frac{۲۶}{۷} = ۳\frac{۵}{۷}$$

۱۰۷- گزینهٔ ۲ با استفاده از رابطهٔ مجموع n جملهٔ متوالی ابتدا صورت و مخرج را به شکل ساده‌تری نوشته و سپس حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱+۲+۳+\cdots+۶۰}{-۱-۲-۳-\cdots-۵۹} = \frac{\frac{۶۰ \times ۶۱}{۲}}{-\frac{۵۹ \times ۶۰}{۲}} = -\frac{۶۱}{۵۹}$$

۱۰۸- گزینهٔ ۲ می دانیم مجموع اعداد زوج متوالی و فرد متوالی از روابط زیر به دست می‌آید:

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱) = n^{۲} \qquad ۲+۴+۶+\cdots+۲n = n(n+۱)$$

پس:

$$\frac{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}{۲+۴+۶+\cdots+۲n} = \frac{n^{۲}}{n(n+۱)} = \frac{n}{n+۱}$$

یعنی:

$$\frac{n}{n+۱} = \frac{۱۱۵}{۱۱۶} \Rightarrow ۱۱۶n = ۱۱۵n + ۱۱۵ \Rightarrow n = ۱۱۵$$

۱۰۹- گزینهٔ ۳ علامت‌های منفی را به جای علامت‌های مثبت طبق دستورالعملی که در صورت سؤال بیان کرده، جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{۱+۲+۳+\cdots+۱۵۴}{۱+۲+۳+\cdots+۳۰۸} \Rightarrow \frac{(۱-۲)+(۳-۴)+\cdots+(۱۵۳-۱۵۴)}{(-۱+۲)+(-۳+۴)+\cdots+(-۳۰۷+۳۰۸)} = \frac{(-۱)+(-۱)+\cdots+(-۱)}{۱+۱+\cdots+۱} = \frac{۷۷ \times (-۱)}{۱۵۴ \times ۱} = \frac{-۷۷}{۱۵۴} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۱۰- گزینهٔ ۲

$$(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۰}) + (\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}+\cdots+\frac{۹۹}{۱۰۰}) = (\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}) + \cdots + (\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۹۹}{۱۰۰}) = ۱+۱+\cdots+۱ = ۹۹ \times ۱ = ۹۹$$

۱۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا کسرهایی که علامت آن‌ها مثبت و سپس کسرهایی را که علامت آن‌ها منفی است، کنار هم می‌نویسیم، سپس مقدار هر یک را محاسبه می‌کنیم.

$$(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵}) + (\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}) + (\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۷}) + (\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۸}) + \cdots + (\frac{۱}{۱۳}-\frac{۱}{۱۶})$$

$$= \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۱}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۳}-\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۱}-\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۳}-\frac{۱}{۱۴}-\frac{۱}{۱۵}-\frac{۱}{۱۶}$$

$$= \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۴}-\frac{۱}{۱۵}-\frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۴۸۳}{۱۶۸۰}$$

۱۱۲- گزینه۵ ابتدا در صورت از عدد ۱۰ و در مخرج از عدد ۳۰ فاکتور گرفته، سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱۰+۲۰+۳۰+\cdots+۴۰۰}{۳۰+۶۰+۹۰+\cdots+۱۲۰۰}=\frac{۱۰(۱+۲+۳+\cdots+۴۰)}{۳۰(۱+۲+۳+\cdots+۴۰)}=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$$

۱۱۳- گزینه۱ در صورت کسر از ۴ و در مخرج کسر از ۲ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{(۱\times۴)+(۲\times۴)+(۳\times۴)+\cdots+(۱۰۰\times۴)}{(۱\times۲)+(۲\times۲)+(۳\times۲)+\cdots+(۱۰۰\times۲)}=\frac{۴(۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰)}{۲(۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰)}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۱۱۴- گزینه۳ در صورت کسر، هر پرانتز شامل عدد ۴ و در مخرج، هر پرانتز شامل عدد ۲ است. این عددها را از هر پرانتز بیرون آورده و کنار هم می‌نویسیم:

$$\frac{(۱\times۴)\times(۲\times۴)\times(۳\times۴)\times\cdots\times(۱۰۰\times۴)}{(۱\times۲)\times(۲\times۲)\times(۳\times۲)\times\cdots\times(۱۰۰\times۲)}=\frac{۴^{۱۰۰}(۱\times۲\times۳\times\cdots\times۱۰۰)}{۲^{۱۰۰}(۱\times۲\times۳\times\cdots\times۱۰۰)}=\frac{۴^{۱۰۰}}{۲^{۱۰۰}}=۲^{۱۰۰}$$

۱۱۵- گزینه۳ با توجه به عددهای ظاهرشده در صورت، واضح است که در هر جمله می‌توان از $۲\times۲\times۲$ فاکتور گرفت، به عبارت دیگر:

$$\frac{(۲\times۴\times۸)+(۴۴۴\times۸۸۸\times۱۷۷۶)+(۸۸۸\times۱۷۷۶\times۳۵۵۳)}{۸+(۲۲۲\times۴۴۴\times۸۸۸)+(۴۴۴\times۸۸۸\times۱۷۷۶)}$$

$$=\frac{(۲\times۲\times۲\times۱\times۲\times۴)+(۲\times۲\times۲\times۲۲۲\times۴۴۴\times۸۸۸)+(۲\times۲\times۲\times۴۴۴\times۸۸۸\times۱۷۷۶)}{(۱\times۲\times۴)+(۲۲۲\times۴۴۴\times۸۸۸)+(۴۴۴\times۸۸۸\times۱۷۷۶)}$$

$$=\frac{۲\times۲\times۲\times[(۱\times۲\times۴)+(۲۲۲\times۴۴۴\times۸۸۸)+(۴۴۴\times۸۸۸\times۱۷۷۶)]}{(۱\times۲\times۴)+(۲۲۲\times۴۴۴\times۸۸۸)+(۴۴۴\times۸۸۸\times۱۷۷۶)}=۲\times۲\times۲=۸$$

۱۱۶- گزینه۲ ابتدا حاصل هر پرانتز (با توجه به این‌که مخرج مشترک دارند) را به دست آورده و سپس با توجه به حاصل‌جمع این کسرها، مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}=\frac{۳}{۳}=۱=\frac{۲}{۲}$$

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲=\frac{۴}{۲}$$

$$\vdots$$

$$\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۲}{۱۰۰}+\cdots+\frac{۹۹}{۱۰۰}=\frac{(۹۹\times۱۰۰)\div۲}{۱۰۰}=\frac{۹۹}{۲}$$

پس:

$$\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳})+(\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۴})+\cdots+(\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۲}{۱۰۰}+\cdots+\frac{۹۹}{۱۰۰})=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲}+\frac{۳}{۲}+\frac{۴}{۲}+\cdots+\frac{۹۹}{۲}=\frac{۱+۲+\cdots+۹۹}{۲}$$

$$=\frac{\frac{۹۹\times۱۰۰}{۲}}{۲}=\frac{۹۹\times۱۰۰}{۴}=۲۴۷۵$$

۱۱۷- گزینه۴ قسمت‌های صحیح را با هم جمع کرده و سپس قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$۱۳۹۲\frac{۱}{۶}+۱۳۹۱\frac{۱}{۳}-۱۳۹۰\frac{۱}{۲}=(۱۳۹۲+۱۳۹۱-۱۳۹۰)+(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲})=۱۳۹۳+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=۱۳۹۳$$

۱۱۸- گزینه۱ قسمت‌های صحیح را با هم و قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$M=۱\frac{۱}{۲}+۱\frac{۲}{۲}+۱\frac{۳}{۲}+\cdots+۳۱=۱\frac{۱}{۲}+۱\frac{۲}{۲}+۱\frac{۳}{۲}+\cdots+۱\frac{۶۰}{۲}=(۱+۱+۱+\cdots+۱)+(\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲}+\frac{۳}{۲}+\cdots+\frac{۶۰}{۲})=۶۰+\frac{۱+۲+۳+\cdots+۶۰}{۲}$$

$$=۶۰+\frac{\frac{۶۰\times۶۱}{۲}}{۲}=۶۰+(۱۵\times۶۱)=۹۷۵$$

۱۱۹- گزینه۴ ابتدا هر عدد را به صورت عدد مخلوط نوشته و سپس قسمت‌های صحیح را با هم و قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$A=۱/۰۱+۲/۰۲+۳/۰۳+\cdots+۱۰/۱=۱\frac{۱}{۱۰۰}+۲\frac{۲}{۱۰۰}+۳\frac{۳}{۱۰۰}+\cdots+۱۰\frac{۱۰}{۱۰۰}=(۱+۲+۳+\cdots+۱۰)+(\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۲}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰}+\cdots+\frac{۱۰}{۱۰۰})$$

$$=\frac{۱۰\times۱۱}{۲}+\frac{۱+۲+۳+\cdots+۱۰}{۱۰۰}=۵۵+\frac{\frac{۱۰\times۱۱}{۲}}{۱۰۰}=۵۵+\frac{۵۵}{۱۰۰}=۵۵/۵۵$$

۱۲۰- گزینهٔ ۳ برای به دست آوردن حاصل عبارت، قسمت‌های صحیح را با هم و قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

یعنی:
$$k=۱\frac{۱}{۱۰۰}+۲\frac{۲}{۱۰۰}+۳\frac{۳}{۱۰۰}+\cdots+۱۰\frac{۱۰}{۱۰۰}=(۱+۲+۳+\cdots+۱۰)+(\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۲}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰}+\cdots+\frac{۱۰}{۱۰۰})$$
$$=(\frac{۱۰\times ۱۱}{۲})+(\frac{۱+۲+۳+\cdots+۱۰}{۱۰۰})=۵۵+\frac{۵۵}{۱۰۰}$$

پس:
$$\frac{k}{۵۵}=\frac{۵۵+\frac{۵۵}{۱۰۰}}{۵۵}=\frac{۵۵}{۵۵}+\frac{\frac{۵۵}{۱۰۰}}{۵۵}=۱+\frac{۱}{۱۰۰}=۱/۰۱$$

۱۲۱- گزینهٔ ۲ قسمت‌های صحیح را با هم و قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$-\frac{۱}{۲}+۱\frac{۱}{۲}-۲\frac{۱}{۲}+۳\frac{۱}{۲}-\cdots-۱۰۰\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}+(۱-۲+۳-۴+\cdots+۹۹-۱۰۰)+(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲})$$
$$=-\frac{۱}{۲}+((-۱)+(-۱)+\cdots+(-۱))+۰=-\frac{۱}{۲}+۵۰(-۱)=-۵۰\frac{۱}{۲}$$

۱۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا مقدار هر پرانتز را ساده می‌کنیم و سپس مقدار عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$(۱+\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۳})(۱+\frac{۱}{۴})\cdots(۱+\frac{۱}{۲۰۰۳})=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}\times\frac{۵}{۴}\times\cdots\times\frac{۲۰۰۴}{۲۰۰۳}=\frac{۲۰۰۴}{۲}=۱۰۰۲$$

۱۲۳- گزینهٔ ۲ ابتدا مقدار هر پرانتز را به دست آورده و سپس با توجه به تعداد پرانتزها، علامت عبارت را تعیین می‌کنیم و در نهایت مقدار عبارت را حساب می‌کنیم:

$$A=(\frac{۱}{۵}-۱)(\frac{۱}{۶}-۱)(\frac{۱}{۷}-۱)\cdots(\frac{۱}{۴۰}-۱)=-\frac{۴}{۵}\times-\frac{۵}{۶}\times-\frac{۶}{۷}\times\cdots\times-\frac{۳۹}{۴۰}$$

با توجه به این‌که تعداد کسرها برابر با $۳۶=۱+۵-۴۰$ تا است، پس حاصل عبارت مثبت است؛ یعنی: $A=\frac{۴}{۴۰}=۰/۱$.

۱۲۴- گزینهٔ ۳ ابتدا حاصل هر پرانتز را به دست می‌آوریم، سپس با توجه به این‌که هر کسری که مخرج آن عددی زوج است، علامت منفی دارد، تعداد علامت‌های منفی را تشخیص داده و سپس مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$(\frac{۱}{۲}-۱)(۱-\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۴}-۱)(۱-\frac{۱}{۵})\cdots(۱-\frac{۱}{۶۹})(\frac{۱}{۷۰}-۱)=(-\frac{۱}{۲})(\frac{۲}{۳})(-\frac{۳}{۴})(\frac{۴}{۵})\cdots(\frac{۶۸}{۶۹})(-\frac{۶۹}{۷۰})$$

تعداد علامت‌های منفی برابر با $۳۵=۲\div۷۰$ تا است؛ پس حاصل کسر منفی است؛ یعنی: حاصل عبارت $=-\frac{۱}{۷۰}$

۱۲۵- گزینهٔ ۲ در هر یک از پرانتزها از عدد ۲ فاکتور گرفته، سپس حاصل هر پرانتز را به دست می‌آوریم و مقدار عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(۲-\frac{۲}{۳})(۲-\frac{۲}{۴})(۲-\frac{۲}{۵})\cdots(۲-\frac{۲}{۱۰۰})=۲(۱-\frac{۱}{۳})\times۲(۱-\frac{۱}{۴})\times۲(۱-\frac{۱}{۵})\cdots\times۲(۱-\frac{۱}{۱۰۰})=۲^{۹۸}(\frac{۲}{۳})(\frac{۳}{۴})(\frac{۴}{۵})\cdots(\frac{۹۹}{۱۰۰})=۲^{۹۸}\times\frac{۲}{۱۰۰}=\frac{۲^{۹۹}}{۱۰۰}$$

پس صد برابر این عبارت مساوی است با:
$$۱۰۰\times\frac{۲^{۹۹}}{۱۰۰}=۲^{۹۹}$$

۱۲۶- گزینهٔ ۳ هر پرانتز را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم و سپس با توجه به ساختار ایجادشده، عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$(۱+۱+\frac{۱}{۴})(۱+\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۹})(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱۶})\times\cdots\times(۱+\frac{۲}{۲۰}+\frac{۱}{۴۰۰})=\frac{۹}{۴}\times\frac{۱۶}{۹}\times\frac{۲۵}{۱۶}\times\frac{۳۶}{۲۵}\times\cdots\times\frac{۴۴۱}{۴۰۰}=\frac{۴۴۱}{۴}$$

۱۲۷- گزینهٔ ۲ منظور از کسر تحویل‌ناپذیر در صورت سؤال، همان کسر ساده‌نشدنی است. با استفاده از راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر، براساس مقدار چند پرانتز اول، یک الگو برای پرانتزهای این عبارت به دست می‌آوریم.

$$(۱-\frac{۱}{۲^۲})(۱-\frac{۱}{۳^۲})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}$$

$$(۱-\frac{۱}{۲^۲})(۱-\frac{۱}{۳^۲})(۱-\frac{۱}{۴^۲})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۸}{۹}\times\frac{۱۵}{۱۶}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۴}$$

$$(۱-\frac{۱}{۲^۲})(۱-\frac{۱}{۳^۲})(۱-\frac{۱}{۴^۲})(۱-\frac{۱}{۵^۲})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۸}{۹}\times\frac{۱۵}{۱۶}\times\frac{۲۴}{۲۵}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۵}$$

$$\vdots$$

$$(۱-\frac{۱}{۲^۲})(۱-\frac{۱}{۳^۲})\cdots(۱-\frac{۱}{۲۰۰۱^۲})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۸}{۹}\times\frac{۱۵}{۱۶}\times\cdots\times\frac{۲۰۰۱^۲-۱}{۲۰۰۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲۰۰۲}{۲۰۰۱}=\frac{۱۰۰۱}{۲۰۰۱}$$

پس: حاصل‌جمع صورت و مخرج $=۱۰۰۱+۲۰۰۱=۳۰۰۲$

۱۲۸- گزینه ۳ با توجه به قاعدهٔ تلسکوپی در کسرها داریم:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{a\times b}$$

پس:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\times\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\times\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}\times\cdots\times\frac{\frac{1}{48}-\frac{1}{49}}{\frac{1}{49}-\frac{1}{50}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}\times\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{30}}\times\frac{\frac{1}{42}}{\frac{1}{56}}\times\cdots\times\frac{\frac{1}{48\times49}}{\frac{1}{49\times50}}=\frac{12}{6}\times\frac{30}{20}\times\frac{56}{42}\times\cdots\times\frac{49\times50}{48\times49}$$

$$=\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\cdots\times\frac{50}{48}=\frac{50}{2}=25$$

۱۲۹- گزینه ۳ ابتدا ساختار سؤال را در حالتی حل می‌کنیم که مرتباً صورت‌ها و مخرج‌ها با هم ساده شوند و سپس با توجه به آن، مقدار A را محاسبه می‌کنیم.

می‌دانیم:

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$$

به عبارت دیگر:

$$\underbrace{\overbrace{(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100})}^{\text{۵۰تا}}}_{A}\times\underbrace{\overbrace{(\frac{1}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{98}{99})}^{\text{۵۰تا}}}_{B}=\frac{1}{100}$$

یعنی:

$$A\times B=\frac{1}{100}$$

اگر $A=B$، آن‌گاه $A=B=\frac{1}{10}$، اما مشخص است که $B>A$، زیرا تک‌تک کسرها در ساختار B از کسرهای نظیرشان در ساختار A بزرگ‌تر هستند.

$$(\frac{2}{3}>\frac{1}{2},\frac{4}{5}>\frac{3}{4},\ldots,1>\frac{99}{100})$$

پس: $B>\frac{1}{10}$ و $A<\frac{1}{10}$.

۱۳۰- گزینه ۲ با توجه به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین کسر در بین این ۱۰۰ کسر، محدودهٔ تغییرات A را تعیین می‌کنیم. مشخص است که همهٔ کسرها از $\frac{1}{100}$ کوچک‌تر هستند؛ به عبارت دیگر:

$$A=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\ldots+\frac{1}{200}<\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A<100\times\frac{1}{100}\Rightarrow A<1$$

هم‌چنین، همهٔ کسرها از $\frac{1}{200}$ (به‌جز آخرین کسر) بزرگ‌تر هستند؛ یعنی:

$$A>100\times\frac{1}{200}\Rightarrow A>\frac{1}{2}$$

پس:

$$\frac{1}{2}<A<1$$

۱۳۱- گزینه ۴ ابتدا هر کسری را طوری به دو کسر تبدیل می‌کنیم که حتماً یکی از آن‌ها عدد یک باشد، یعنی:

$$B=(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{6}+\cdots+\frac{61}{60})+(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\cdots+\frac{60}{61})=(1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{6}+\cdots+1+\frac{1}{60})+(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{5}+1-\frac{1}{7}+\cdots+1-\frac{1}{61})$$

$$=30+30+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{60}-\frac{1}{61})=60+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{3660}}_{\text{۳۰تا}}$$

مشخص است که حداکثر مقدار هر کسر برابر با $\frac{1}{6}$ است؛ پس جمع ۳۰تا کسر از ۳۰تا $\frac{1}{6}$ کم‌تر است؛ به عبارت دیگر جمع این کسرها از $30\times\frac{1}{6}=5$ کم‌تر است؛ پس:

$$60<B<65$$

۱۳۲- گزینه ۴ برای این‌که ساختار A و B در کسر داده‌شده ایجاد شود، صورت و مخرج آن را در $2\times4\times6\times\cdots\times100$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2\times4\times6\times\cdots\times100\times(2\times4\times6\times\cdots\times100)}{3\times5\times\cdots\times101\times(2\times4\times6\times\cdots\times100)}=\frac{(2\times4\times6\times\cdots\times100)^2}{1\times2\times3\times4\times\cdots\times101}$$

$$=\frac{(2\times1\times2\times2\times2\times3\times\cdots\times2\times50)^2}{A\times101}=\frac{(2^{50}\times1\times2\times3\times\cdots\times50)^2}{A\times101}=\frac{2^{100}\times B^2}{101A}$$

۱۳۳- گزینه۳ ابتدا طرفین تساوی را در ۴ ضرب می‌کنیم و سپس با توجه به رابطه بین A و ۴A مقدار خواسته‌شده را به دست می‌آوریم.

$$A=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۲}+...=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳۲}+\cdots$$

$$۴A=۲+\underbrace{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳۲}+\cdots}_{A}\Rightarrow ۴A=۲+A\Rightarrow ۳A=۲\Rightarrow A=\frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۲}<\frac{۲}{۳}<۱$$

۱۳۴- گزینه۱ با توجه به این‌که متغیر a در همهٔ کسرها وجود دارد، ابتدا از a فاکتور گرفته، سپس مقدار عبارت باقی‌مانده را به دست می‌آوریم و در نهایت با توجه به آن، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$a+\frac{a}{۳}+\frac{a}{۹}+\frac{a}{۲۷}+\cdots=۱۲\Rightarrow a(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots)=۱۲\qquad (*)$$

از طرفی:

$$A=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots\Rightarrow ۳A=۳+\underbrace{۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\cdots}_{A}\Rightarrow ۳A=۳+A\Rightarrow ۲A=۳\Rightarrow A=\frac{۳}{۲}$$

پس با توجه به (*) داریم:

$$a(\frac{۳}{۲})=۱۲\Rightarrow a=۱۲\div\frac{۳}{۲}=۱۲\times\frac{۲}{۳}=۸$$

۱۳۵- گزینه۴ می‌دانیم اگر در دنباله‌ای بی‌انتها از اعداد، هر عدد از ضرب عدد قبلی در عددی ثابت (بین ۱ و ۱−) به وجود آید، برای به دست آوردن مجموع آن‌ها داریم:

$$\text{مجموع}=\frac{\text{اولین عدد}}{\text{۱− عدد ثابت}}$$

در این سؤال:

$$S=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۱۶}+\cdots=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots$$

$$=(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots)+(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots)+(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots)+\cdots$$

طبق مطلبی که در بالا گفته شده می‌توان نوشت:

$$S=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}+\frac{\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۲}}+\frac{\frac{۱}{۸}}{۱-\frac{۱}{۲}}+\cdots=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}+\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}}+\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۲}}+\cdots=۱+\underbrace{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots}_{۱}=۱+۱=۲$$

کسرهای مسلسل و تلسکوپی

۱۳۶- گزینه۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را کمی ساده‌تر کرده و سپس حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\text{صورت کسر}=۲+\frac{۲+\frac{۲+۱}{۱}}{۱}=۲+\frac{۲+۳}{۱}=۷$$

$$\text{مخرج کسر}=۲-\frac{۱}{۲-\frac{۱}{۲-۱}}=۲-\frac{۱}{۲-۱}=۲-۱=۱$$

پس:

$$۲\div\frac{۲+\frac{۲+\frac{۲+۱}{۱}}{۱}}{۲-\frac{۱}{۲-\frac{۱}{۲-۱}}}=۲\div\frac{۷}{۱}=\frac{۲}{۷}$$

۱۳۷- گزینه۳ می‌دانیم هر کسری مثل $\frac{x}{y}$ برابر است با:

$$\frac{x}{y}=\frac{۱}{\frac{y}{x}}$$

با استفاده از این روند و تبدیل عدد کسری به عدد مخلوط، ساختار موردنظر را ایجاد کرده و سپس مقادیر مجهول را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۵۳}{۱۷}=۳+\frac{۲}{۱۷}=۳+\frac{۱}{\frac{۱۷}{۲}}=۳+\frac{۱}{۸+\frac{۱}{۲}}$$

پس:

$$x=۸\ ,\ y=۲\Rightarrow x+y=۱۰$$

۱۳۸- گزینهٔ ۱ برای حل این سؤال می‌توانیم از رابطهٔ زیر که به ازای هر عدد a غیرصفر همواره برقرار است، استفاده کرد: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}=1$

برای استفاده از این رابطه ابتدا کسر اول را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2014}}}}}=\cfrac{1}{1+\underbrace{\left(1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2014}}}}\right)}_{A}}=\frac{1}{1+A}$$

با این ساختار کسر دوم به شکل $\frac{1}{1+\frac{1}{A}}$ نوشته شده است، پس: $\frac{1}{1+A}+\frac{1}{1+\frac{1}{A}}=1$ = حاصل عبارت

۱۳۹- گزینهٔ ۱ در این نوع سؤالات، ساختار عبارت درون عبارت مرتباً تکرار می‌شود. با در نظر گرفتن این ساختار به شکل A، مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$A=1+\cfrac{2}{\underbrace{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{\dots}}}}_{A}}\Rightarrow A=1+\frac{2}{A}\Rightarrow A=\frac{A+2}{A}\Rightarrow A^2=A+2$$

با امتحان گزینه‌ها: $A=2$.

۱۴۰- گزینهٔ ۳ با استفاده از قانون تلسکوپی، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{29\times30}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{29}-\frac{1}{30}=\frac{1}{1}-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$$

۱۴۱- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که اختلاف اعدادی که در مخرج ضرب شده‌اند، در صورت ظاهر شده، با استفاده از قانون تلسکوپی، حاصل عبارت را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\frac{3}{1\times4}+\frac{5}{4\times9}+\frac{7}{9\times16}+\dots+\frac{19}{81\times100}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۵ ابتدا از منفی فاکتور گرفته و سپس از قاعدهٔ تلسکوپی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}-\dots-\frac{1}{49\times50}=\frac{1}{1\times2}-\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{49\times50}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{50}=\frac{1}{50}$$

۱۴۳- گزینهٔ ۳ اختلاف اعدادی که در مخرج ضرب شده‌اند برابر با ۲ است ولی در صورت، عدد ۱ ظاهر شده است. برای این‌که بتوانیم از قانون تلسکوپی استفاده کنیم، عبارت را در ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\dots+\frac{1}{998\times100}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{4\times6}+\frac{2}{6\times8}+\dots+\frac{2}{998\times1000}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{998}-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{499}{1000}=\frac{499}{2000}$$

۱۴۴- گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که مجموع اعدادی که در مخرج ضرب شده‌اند، در صورت کسر ظاهر شده است، از قاعدهٔ تلسکوپی جمع استفاده می‌کنیم:

$$\frac{5}{1\times4}-\frac{13}{4\times9}+\frac{25}{9\times16}-\frac{41}{16\times25}+\dots-\frac{221}{100\times121}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\right)+\dots-\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{121}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{121}=\frac{120}{121}$$

۱۴۵- گزینهٔ ۳ با فاکتورگیری از $\frac{7}{5}$، ساختار عبارت به شکلی تبدیل می‌شود که می‌توان از قانون تلسکوپی استفاده کرد.

$$\frac{7}{50}+\frac{7}{150}+\frac{7}{300}+\frac{7}{500}+\frac{7}{750}+\frac{7}{1050}=\frac{7}{5\times10}+\frac{7}{10\times15}+\frac{7}{15\times20}+\frac{7}{20\times25}+\frac{7}{25\times30}+\frac{7}{30\times35}$$

$$=\frac{7}{5}\left(\frac{5}{5\times10}+\frac{5}{10\times15}+\dots+\frac{5}{30\times35}\right)=\frac{7}{5}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{30}-\frac{1}{35}\right)=\frac{7}{5}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{35}\right)=\frac{7}{5}\times\frac{6}{35}=\frac{6}{25}$$

۱۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج هر کسر را با توجه به رابطهٔ $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ به شکل ساده‌تری نوشته و سپس به کمک قاعدهٔ تلسکوپی،حاصل عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۱+۲}+\frac{۱}{۱+۲+۳}+\frac{۱}{۱+۲+۳+۴}+\cdots+\frac{۱}{۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰}=\frac{۱}{\frac{۱\times ۲}{۲}}+\frac{۱}{\frac{۲\times ۳}{۲}}+\frac{۱}{\frac{۳\times ۴}{۲}}+\frac{۱}{\frac{۴\times ۵}{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\frac{۱۰۰\times ۱۰۱}{۲}}$$

$$=\frac{۲}{۱\times ۲}+\frac{۲}{۲\times ۳}+\frac{۲}{۳\times ۴}+\frac{۲}{۴\times ۵}+\cdots+\frac{۲}{۱۰۰\times ۱۰۱}=۲(\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\frac{۱}{۳\times ۴}+\frac{۱}{۴\times ۵}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۰\times ۱۰۱})$$

$$۲(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۰}-\frac{۱}{۱۰۱})=۲(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۱۰۱})=۲\times\frac{۱۰۰}{۱۰۱}=\frac{۲۰۰}{۱۰۱}$$

۱۴۷- گزینهٔ ۴ هر کسر را با استفاده از قانون کسرهای تلسکوپی به شکل ساده‌تری می‌نویسیم و با توجه به آن، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۲!}=\frac{۲-۱}{۲!}=\frac{۲}{۲!}-\frac{۱}{۲!}=\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۲!}$$

$$\frac{۲}{۳!}=\frac{۳-۱}{۳!}=\frac{۳}{۳!}-\frac{۱}{۳!}=\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}$$

$$\frac{۳}{۴!}=\frac{۴-۱}{۴!}=\frac{۴}{۴!}-\frac{۱}{۴!}=\frac{۱}{۳!}-\frac{۱}{۴!}$$

$$\vdots$$

$$\frac{۹۹}{۱۰۰!}=\frac{۱۰۰-۱}{۱۰۰!}=\frac{۱۰۰}{۱۰۰!}-\frac{۱}{۱۰۰!}=\frac{۱}{۹۹!}-\frac{۱}{۱۰۰!}$$

پس:

$$A=\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\frac{۳}{۴!}+\cdots+\frac{۹۹}{۱۰۰!}=\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۱۰۰!}=۱-\frac{۱}{۱۰۰!}$$

چند سؤال دیگر از اعداد گویا

۱۴۸- گزینهٔ ۳ وقتی آب یخ می‌زند، حجمش $\frac{۱}{۱۰}$ بیشتر می‌شود؛ یعنی حجم جدید برابر است با: $۱+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۱}{۱۰}$

از طرفی وقتی یخ آب می‌شود، حجم آن باید به حجم اولیه برسد؛ برای این‌که این حجم به حجم اولیه برسد، باید $\frac{۱}{۱۰}$ از $\frac{۱۱}{۱۰}$ کم شود؛ یعنی نسبت مقدار حجم کم‌شده برابر است با:

$$\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱۱}{۱۰}}=\frac{۱}{۱۱}$$

۱۴۹- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که فرزند اول در هر ساعت $\frac{۱}{۸}$ کار و فرزند دوم در هر ساعت $\frac{۱}{۶}$ کار را انجام می‌دهد، پس پدر که معادل دو فرزند خود کار می‌کند در هر ساعت $\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۲۴}$ کار را انجام می‌دهد؛ پس کل کار توسط پدر در $\frac{۲۴}{۷}$ ساعت انجام می‌شود. $(\frac{۲۴}{۷}=۳\frac{۳}{۷})$

۱۵۰- گزینهٔ ۴ افشین و محمد کار را در $\frac{۴}{۵}$ روز انجام می‌دهند، یعنی در یک روز $\frac{۵}{۴}$ کار را انجام می‌دهند.

محمد و شهرام کار را در $\frac{۲}{۳}$ روز، یعنی در یک روز $\frac{۳}{۲}$ کار را انجام می‌دهند.

شهرام و افشین کار را در $\frac{۴}{۷}$ روز انجام می‌دهند، یعنی در یک روز $\frac{۷}{۴}$ کار را انجام می‌دهند.

اما

$$\frac{۵}{۴}+\frac{۳}{۲}+\frac{۷}{۴}=\frac{۵+۶+۷}{۴}=\frac{۱۸}{۴}=\frac{۹}{۲}$$

پس کل کاری که در یک روز انجام می‌شود (به شرطی که هر نفر ۲ بار حساب شود) برابر با $\frac{۹}{۲}$ است؛ یعنی کل کار در $\frac{۲}{۹}$ روز انجام می‌شود؛ ولی چون هر شخص ۲ بار حساب شده، زمان ۲ برابر می‌شود؛ یعنی کل کار توسط این ۳ نفر در $\frac{۴}{۹}$ روز انجام می‌شود.

۱۵۱- گزینه۴ شیرهای C و D در هر دقیقه به ترتیب $\frac{۱}{۶۰}$ و $\frac{۱}{۹۰}$ استخر را پر می‌کنند؛ پس در ۲۰ دقیقه به ترتیب $\frac{۲۰}{۶۰}$ و $\frac{۲۰}{۹۰}$ استخر را پر می‌کنند؛ یعنی با هم $\frac{۵}{۹}$ استخر را پر می‌کنند: $(\frac{۲۰}{۶۰}+\frac{۲۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۹}=\frac{۵}{۹})$

بنابراین $\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}-۱$ استخر هنوز خالی است. حال اگر همهٔ شیرها با هم باز باشند در هر دقیقه $\frac{۱}{۱۲}$ استخر پر می‌شود؛ زیرا:

$$\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۴۵}+\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۹۰}=\frac{۶+۴+۳+۲}{۱۸۰}=\frac{۱۵}{۱۸۰}=\frac{۱}{۱۲}$$

اگر مدت زمانی که احتیاج است تا بقیهٔ استخر پر شود را x دقیقه فرض کنیم، داریم:

$$\frac{۱}{x}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۴}{۹}} \Rightarrow \frac{۱}{۱۲}x=\frac{۴}{۹} \Rightarrow x=\frac{۴}{۹}\div\frac{۱}{۱۲}=\frac{۴۸}{۹}=۵/۳۳$$

۱۵۲- گزینه۲ نسبت افرادی که مشغول مطالعه هستند برابر است با: $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۷}=\frac{۱۴+۷+۴}{۲۸}=\frac{۲۵}{۲۸}$

پس $\frac{۲۵}{۲۸}$ کل افراد در حال مطالعه و $\frac{۳}{۲۸}=\frac{۲۵}{۲۸}-۱$ افراد هم غایب هستند. با توجه به فرض مسئله، تعداد افراد غایب که $\frac{۳}{۲۸}$ افراد را تشکیل می‌دهند برابر با ۳ نفر است؛ پس تعداد کل افراد برابر است با:

$$\begin{array}{c|c} ۳ & ۳ \\ \hline ۲۸ & ? \end{array} \Rightarrow ?=۲۸$$

که عدد ۲۸ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۱۵۳- گزینه۱ با توجه به فرضیات مسئله، مقدار حافظهٔ باقی‌مانده بعد از گذشت هر روز را محاسبه می‌کنیم:

مقدار حافظهٔ باقی‌مانده در روز اول $=\frac{۱}{۲}$

($\frac{۱}{۳}$ باقی‌مانده از بین می‌رود، پس $\frac{۲}{۳}$ آن باقی می‌ماند)

مقدار حافظهٔ باقی‌مانده در روز دوم $=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}$

مقدار حافظهٔ باقی‌مانده در روز سوم $=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}$

مقدار حافظهٔ باقی‌مانده در روز چهارم $=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}$

۱۵۴- گزینه۳ با توجه به این‌که حقوق احمدآقا هر سال ۱/۶ و قیمت سکه هر سال ۱/۲ برابر می‌شود، پس نسبت افزایش حقوق احمدآقا به افزایش قیمت سکه برابر است با: $\frac{۱/۶}{۱/۲}=\frac{۴}{۳}$

پس بعد از ۴ سال این نسبت برابر می‌شود با: $(\frac{۴}{۳})^۴$.

بنابراین تعداد سکه‌هایی که او می‌تواند بعد از ۴ سال بخرد برابر است با: $۵۴\times(\frac{۴}{۳})^۴=۵۴\times\frac{۲۵۶}{۸۱}=\frac{۵۱۲}{۳}\sim۱۷۰/۶$

یعنی او می‌تواند بعد از ۴ سال ۱۷۰ سکه بخرد.

۱۵۵- گزینه۴ حاصل هر یک از عبارت ها را با رعایت اولویت اعمال ریاضی به دست می‌آوریم:

$$(a\div b)\div(c\div d)=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$((a\div b)\div c)\div d=(\frac{a}{b}\div c)\div d=(\frac{a}{b}\times\frac{۱}{c})\times\frac{۱}{d}=\frac{a}{bcd}$$

$$(a\div(b\div c))\div d=(a\div(\frac{b}{c}))\div d=(a\times\frac{c}{b})\times\frac{۱}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$a\div((b\div c)\div d)=a\div(\frac{b}{c}\div d)=a\div(\frac{b}{cd})=a\times\frac{cd}{b}=\frac{acd}{b}$$

$$a\div(b\div(c\div d))=a\div(b\div\frac{c}{d})=a\div(\frac{bd}{c})=a\times\frac{c}{bd}=\frac{ac}{bd}$$

با توجه به مقادیر بالا، ۴ مقدار مختلف به دست می‌آید.

۱۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا با توجه به مفروضات مسئله همهٔ متغیرها را برحسب a می‌نویسیم و سپس با توجه به معادلهٔ داده‌شده، مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$b=a+\frac{۱}{۵}\quad(۱)$$

$$b=c-\frac{۱}{۶}\Rightarrow c=b+\frac{۱}{۶}\xrightarrow{(۱)}c=a+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}\Rightarrow c=a+\frac{۱۱}{۳۰}\quad(۲)$$

$$d=a+\frac{۱}{۲}\quad(۳)$$

پس:

$$a+b+c+d=۹\frac{۱}{۱۵}\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)\text{ و }(۳)}a+a+\frac{۱}{۵}+a+\frac{۱۱}{۳۰}+a+\frac{۱}{۲}=۹\frac{۱}{۱۵}$$

$$\Rightarrow ۴a+\frac{۳۲}{۳۰}=\frac{۴۶}{۵}\Rightarrow ۴a=\frac{۴۶}{۵}-\frac{۳۲}{۳۰}=\frac{۲۴۰}{۳۰}=۸\Rightarrow a=۲$$

۱۵۷- گزینهٔ ۴ با حدس و آزمایش این مقادیر را به دست می‌آوریم:

بیشترین مقدار $=\frac{۱\times۱\times۱}{۲\times۱-۱}=\frac{۱}{۱}=۱$

کم‌ترین مقدار $=\frac{۱-۱-۱}{۲\times۱-۱}=\frac{-۱}{۱}=-۱$

اختلاف $=۱-(-۱)=۲$

۱۵۸- گزینهٔ ۳ با حدس و آزمایش این بیشترین مقدار را به دست می‌آوریم.

$$x=۱۰\ ,\ y=۱\Rightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{۱۰}{۱}+\frac{۱}{۱۰}=۱۰/۱$$

۱۵۹- گزینهٔ ۵ برای این‌که بیشترین مقدار به دست آید، باید صورت کسر بیشترین مقدار ممکن و مخرج کسر کم‌ترین مقدار ممکن باشد؛ پس:

بیشترین مقدار صورت $=۲۰۰۴+۲۰۰۳=۴۰۰۷$

کم‌ترین مقدار مخرج $=۲۰۰۴-۲۰۰۳=۱$

پس:

$$\frac{\Delta+\nabla}{\Delta-\nabla}\text{ بیشترین مقدار }=\frac{۴۰۰۷}{۱}=۴۰۰۷$$

۱۶۰- گزینهٔ ۴ با حدس و آزمایش این مقادیر را حساب می‌کنیم:

حالت‌های متفاوتی که می‌توان عدد ۱ را با مجموع ۳ کسر نوشت عبارت‌اند از:

$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow$ ۶ حالت

$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱\Rightarrow$ ۳ حالت

$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}=۱\Rightarrow$ ۱ حالت

پس جمعاً $۱+۳+۶=۱۰$ حالت برای سه‌تایی (x,y,z) وجود دارد.

۱۶۱- گزینهٔ ۱ به همان ترتیبی که اعداد نوشته شده‌اند، مجموع $a+b+ab$ را به دست می‌آوریم:

$$(۱)\ \ a=۱,b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a+b+ab=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲$$

$$(۲)\ \ a=۲,b=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a+b+ab=۲+\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}=۳$$

$$(۳)\ \ a=۳,b=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a+b+ab=۳+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=۴$$

$$\vdots$$

$$(۹۹)\ \ a=۹۹,b=\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow a+b+ab=۹۹+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۹۹}{۱۰۰}=۱۰۰$$

پس آخرین عددی که باقی می‌ماند برابر با ۱۰۰ است.

۱۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا ساختار عبارت داده‌شده را به صورت $a\times b-c$ می‌نویسیم و سپس با توجه به آن، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

(دقت شود که اولویت در این ساختار ابتدا با عمل تفریق است.)

$$-c+d=-(c+d)$$

پس:

$$a\div b-c+d=a\div b-(c+d)=a\div(b-(c+d))=\frac{a}{b-c-d}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا ساختار M را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم:

$$M=\frac{۱۰n}{۱+۲n}=\frac{۱۰n}{\frac{n}{n}+۲n}=\frac{۱۰n}{n(\frac{۱}{n}+۲)}=\frac{۱۰}{\frac{۱}{n}+۲}$$

با توجه به عبارت بالا، اگر n زیاد شود، مقدار $\frac{۱}{n}$ کوچک‌تر می‌شود؛ یعنی مقدار مخرج M کوچک‌تر شده و حاصل کسر M بزرگ‌تر می‌شود.

۱۶۴- گزینهٔ ۴ مربع اول به ۹ قسمت، مربع مرکز به ۴ قسمت و مجدداً مربع بعدی به ۹ قسمت تقسیم شده است؛ پس:

$$\text{مساحت مربع کوچک سیاه}=\frac{۱}{۹}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۳۲۴}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۴ با استفاده از راهبرد الگویابی داریم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...	۲۰
خانه‌های سیاه	$۱=۲\times۱-۱$	$۳=۲\times۲-۱$	$۵=۲\times۳-۱$	...	$۳۹=۲\times۲۰-۱$
خانه‌های رنگی	$۵=۶\times۱-۱$	$۱۱=۶\times۲-۱$	$۱۷=۶\times۳-۱$	...	$۱۱۹=۶\times۲۰-۱$

پس در شکل ۲۰اُم نسبت موردنظر برابر با $\frac{۱۱۹}{۳۹}$ است.

۱۶۶- گزینهٔ ۳ برای این‌که به مخرج ۱۲ برسیم، باید مخرج‌های ۲، ۳، ... و ۱۰ نوشته شده باشند. از طرفی برای مخرج ۲، یک کسر، برای مخرج ۳، دو کسر، ... برای مخرج ۱۱، ده کسر وجود دارد؛ پس قبل از $\frac{۱}{۱۲}$ به تعداد $۵۵=۱۰+\cdots+۳+۲+۱$ کسر نوشته شده است؛ پس $\frac{۱}{۱۲}$، ۵۶اُمین کسر است.

۱۶۷- گزینهٔ ۴ ابتدا مخرج کسر را پیدا می‌کنیم (می‌دانیم با توجه به سؤال قبل)، اگر مخرج کسر $n+۲$ باشد، حداقل $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ کسر قبل از آن نوشته شده است؛ یعنی: $\frac{n(n+۱)}{۲}\leq ۳۵۶$

با حدس و آزمایش $(۳۵۱=\frac{۲۶\times۲۷}{۲})$ $n=۲۶$، پس ۳۵۱ اُمین کسر عدد $\frac{۲۵}{۲۶}$ است؛ لذا کسر ۳۵۶اُم برابر است با: $\frac{۱}{۲۷},\frac{۲}{۲۷},\frac{۳}{۲۷},\frac{۴}{۲۷},\frac{۵}{۲۷}$

۱۶۸- گزینهٔ ۱ برای پیداکردن بیشترین و کم‌ترین مقدار $\frac{a}{b}$ از حدس و آزمایش استفاده می‌کنیم:

برای پیداکردن بیشترین مقدار، صورت کسر باید بیشترین مقدار ممکن و مخرج باید کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد (اگر صورت و مخرج هم‌علامت باشند) که این بیشترین مقدار به ازای $a=۳$ و $b=۱$ به دست می‌آید. $\text{بیشترین مقدار}=\frac{a}{b}=\frac{۳}{۱}=۳$

برای یافتن کم‌ترین مقدار ممکن به این مطلب باید توجه داشته باشیم که صورت و مخرج باید مختلف‌العلامت باشند که این کم‌ترین مقدار به ازای $a=-۳$ و $b=۱$ به دست می‌آید. $\text{کم‌ترین مقدار}=\frac{a}{b}=\frac{-۳}{۱}=-۳$

پس: $-۳<\frac{a}{b}<۳$.

۱۶۹- گزینهٔ ۵ برای به دست آوردن a و b باید بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار $\frac{x}{y}$ را به دست آوریم:

بیشترین مقدار $\frac{x}{y}$، به ازای مقادیری از x و y به دست می‌آید که اولاً x و y هم‌علامت باشد و ثانیاً x بیشترین مقدار ممکن و y کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{بیشترین مقدار}=\xrightarrow[y=-\frac{۱}{۲}]{x=-۶}\frac{x}{y}=\frac{-۶}{-\frac{۱}{۲}}=+۱۲=b$$

برای به دست آوردن کم‌ترین مقدار $\frac{x}{y}$، به این نکته باید توجه داشته باشیم که x و y باید مختلف‌العلامت باشند.

$$\text{کم‌ترین مقدار}=\xrightarrow[y=-\frac{۱}{۲}]{x=۱۰}\frac{x}{y}=\frac{۱۰}{-\frac{۱}{۲}}=-۲۰=a$$

پس: $a\times b=-۲۰\times۱۲=-۲۴۰$

۱۷۰- **گزینه ۳** می‌دانیم اگر مخرج کسر عدد ۱۰ باشد، تعداد ارقام اعشار آن یکی، و اگر مخرج کسر $۱۰^۲$ باشد، تعداد ارقام اعشار آن کسر دوتا و ... و اگر مخرج کسر ۱۰^n باشد، تعداد ارقام اعشار آن nتا است. در این سؤال ابتدا مخرج کسر را تجزیه کرده و سپس تعداد توان‌های عدد ۱۰ را می‌یابیم و در نهایت با توجه به آن، تعداد ارقام اعشار را تعیین می‌کنیم.

$$۱۰۲۴۰۰۰ = ۲^{۱۰} \times ۱۰^{۳}$$

$$\frac{۱}{۱۰۲۴۰۰۰} = \frac{۱}{۲^{۱۰} \times ۱۰^{۳}} \overset{\times ۵^{۱۰}}{=} \frac{۵^{۱۰}}{۱۰^{۱۰} \times ۱۰^{۳}} = \frac{۵^{۱۰}}{۱۰^{۱۳}}$$

پس:

با توجه به این‌که مخرج کسر به صورت $۱۰^{۱۳}$ است، پس تعداد ارقام اعشار این کسر برابر با ۱۳تا است.

۱۷۱- **گزینه ۱** ابتدا هر یک از کسرها را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۶}{۱۴} = \frac{۳}{۷} \qquad ۲\frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳} \qquad ۱\frac{۱۵}{۲۱} = \frac{۳۶}{۲۱} = \frac{۱۲}{۷}$$

فرض کنید این کوچک‌ترین عدد موردنظر برابر با a باشد؛ پس:

$a \div \frac{۸}{۳}$ یعنی $\frac{۳a}{۸} = a \times \frac{۳}{۸}$ باید مقداری صحیح باشد؛ پس a باید مضرب ۸ باشد.

$a \div \frac{۱۲}{۷}$ یعنی $\frac{۷a}{۱۲} = a \times \frac{۷}{۱۲}$ باید مقداری صحیح باشد؛ بنابراین a باید مضرب ۱۲ باشد.

$a \div \frac{۳}{۷}$ یعنی $\frac{۷a}{۳} = a \times \frac{۷}{۳}$ باید مقداری صحیح باشد؛ پس a باید مضرب ۳ باشد.

از آن‌جا که کوچک‌ترین مقدار ممکن مدنظر است، پس: $a = [۸, ۱۲, ۳] = ۲۴$

۱۷۲- **گزینه ۴** ابتدا ساختار کسرها را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۶}{n+۹} = \frac{۶}{(n+۳)+۶}$$

$$\frac{۵}{n+۸} = \frac{۵}{(n+۳)+۵}$$

$$\frac{۴}{n+۷} = \frac{۴}{(n+۳)+۴}$$

از آن‌جا که می‌خواهیم صورت هر کسر با مخرج آن ساده شود، کافی است $n+۳$ مقداری باشد که بر ۳ عدد ۴، ۵ و ۶ بخش‌پذیر باشد و از آن‌جا که کم‌ترین مقدار مدنظر است، پس: $n+۳ = [۴, ۵, ۶] = ۶۰ \Rightarrow n = ۶۰ - ۳ = ۵۷$