

راهبرد حل تپ (۱)

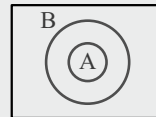
[۱] هر عدد اعشاری متناوب، عددی گویاست؛ مانند: $0.\overline{2}$ ، $0.\overline{25}$.
 [۲] نماد \in برای عضویت و نماد \notin برای عدم عضویت اعضای یک مجموعه استفاده می‌شود. همچنین نماد \subseteq برای زیرمجموعه بودن یک مجموعه استفاده می‌شود. به عنوان مثال:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$a \in A, d \notin A$$

$$\{a\} \subseteq A, \{a, c\} \subseteq A$$

[۳] اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه:



$$A \cap B = A$$

$$A \cup B = B$$

$$A - B = \emptyset$$

بنابراین برای مجموعه‌های $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ، برای اشتراک، مجموعه‌ی سمت چپ و برای اجتماع، مجموعه‌ی سمت راست خواهد بود، یعنی:

$$N \subseteq W \Rightarrow N \cap W = N, N \cup W = W$$

$$Z \subseteq Q \Rightarrow Z \cap Q = Z, Z \cup Q = Q$$

* تذکر: در اعمال بر روی مجموعه‌ها، حتماً به پرانتزها توجه کنید. ابتدا باید عملیات داخل پرانتزها را انجام دهید.

گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): درست است، زیرا π یک عدد گنگ است که مجموع آن با یک عدد گویا، همچنان گنگ است و عضو اعداد گویا (Q) نیست.

گزینه‌ی (۲): درست است، زیرا حاصل عبارت برابر با $1/4 + 1/4 - 0/4 + 1/5 = 0/4 + 1/4 + 1/5 = 1/4 + 1/5 = 5/20 + 4/20 = 9/20$ است.

گزینه‌ی (۳): درست است، زیرا حاصل عبارت برابر با $0 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{8} - 2\sqrt{2}$ است که عددی حسابی است.

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا $1/3 = 0.333... = 0/333...$ عددی گویاست.

گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا $\sqrt{3} + 5$ عددی گنگ است و همچنین داریم: $R - Q = Q'$ ، بنابراین: $5 \in (R - Q)$ ، $\sqrt{3} + 5 \in Q'$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا $-3/4$ عددی گویاست و عضو مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) یا مجموعه‌ی اعداد گنگ (Q') نیست، بنابراین: $-3/4 \notin (Z \cup Q')$

گزینه‌ی (۳): درست است، زیرا $0.\overline{6}$ یک عدد اعشاری متناوب است که عضو مجموعه‌ی اعداد گویاست و مجموع آن با عدد گویای $2/3$ نیز همچنان گویاست، همچنین داریم: $Q \cap R = Q$ ، بنابراین:

$$0.\overline{6} + 2/3 \in (Q \cap R)$$

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا دو عضو $\sqrt{1} = 1$ و $\sqrt{4} = 2$ از مجموعه‌ی $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$ اعداد طبیعی هستند، پس مجموعه‌ی $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$ نمی‌تواند زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی اعداد گنگ باشد، بنابراین:

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\} \not\subseteq Q'$$

گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): $R \cap Z = Z$ ، پس گزینه‌ی (۱) نادرست است.

گزینه‌ی (۲): $Z \subset Q \Rightarrow Z \cup Q = Q$ ، پس گزینه‌ی (۲) نادرست است.

گزینه‌ی (۳): $W \subset Q \Rightarrow Q \cap W = W$ ، پس رابطه درست است.

گزینه‌ی (۴): $Q \subset R \Rightarrow R \cap Q = Q$ ، اما Q و Q' اشتراکی ندارند، پس $Q \not\subseteq Q'$.

گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): $W - N = \{0\}$ ، بنابراین:

$$W - (W - N) = W - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} = N$$

گزینه‌ی (۲): Q' مجموعه‌ی اعداد گنگ است. از آنجایی که N و Q' با هم اشتراکی ندارند، پس:

$$N - Q' = N$$

گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۳): $W \subset Z \Rightarrow W \cap Z = W \Rightarrow (W \cap Z) - \{0\} = W - \{0\} = N$

گزینه‌ی (۴): $N \subset W \Rightarrow W \cup N = W$

گزینه‌ی ۲

گزینه‌ی (۱): $(Z - N) \cup W = \{0, -1, -2, -3, \dots\} \cup \{0, 1, 2, \dots\} = Z$

۹. گزینه‌ی ۳

بازه‌ی $[2n-1, 3n+14]$ شامل عدد ۵ است، بنابراین:

$$2n-1 < 5 \leq 3n+14$$

نامساوی فوق را به دو نامساوی زیر، تبدیل کرده و اشتراک جواب‌هایشان را می‌یابیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n-1 < 5 \Rightarrow 2n < 6 \Rightarrow n < 3 & \text{(I)} \\ 5 \leq 3n+14 \Rightarrow -9 \leq 3n \Rightarrow -3 \leq n & \text{(II)} \end{cases}$$

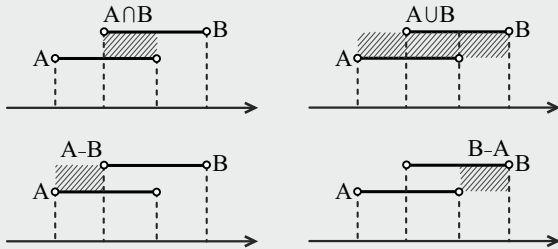
$$\xrightarrow{\text{(I)} \cap \text{(II)}} -3 \leq n < 3$$

بنابراین حداقل مقدار n برابر با ۳ است.

راهبرد حل تیب (۳)

[۱] برای انجام اعمال روی بازه‌ها، ابتدا بازه‌ها را روی محور اعداد مشخص کنید و سپس عملیات را انجام دهید.

[۲] اجتماع، اشتراک و تفاضل دو بازه در محورهای زیر، هاشور زده شده است.

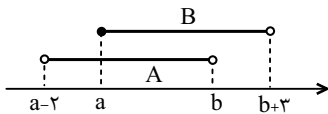


[۳] توجه کنید اگر $a < b$ باشد، آنگاه:

- (۱) $(-\infty, a] \cup [b, +\infty) = \mathbb{R} - (a, b)$
- (۲) $(-\infty, a) \cup (b, +\infty) = \mathbb{R} - [a, b]$
- (۳) $(-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \mathbb{R} - [a, b)$
- (۴) $(-\infty, a] \cup (b, +\infty) = \mathbb{R} - (a, b]$

۱۰. گزینه‌ی ۲

از آنجا که $a < b$ است، نمایش بازه‌های A و B روی محور اعداد به صورت زیر است:

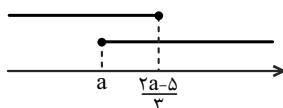


$$A \cap B = [a, b)$$

بنابراین داریم:

۱۱. گزینه‌ی ۴

نمایش هندسی دو بازه می‌تواند به صورت زیر باشد:



برای اینکه اشتراک دو بازه، یک مجموعه‌ی تک عضوی باشد، دو بازه فقط باید در یک نقطه اشتراک داشته باشند، بنابراین:

$$a = \frac{2a-5}{3} \Rightarrow 3a = 2a-5 \Rightarrow a = -5$$

گزینه‌ی (۲): $(Z-N) \cap W$

$$= \{0, -1, -2, -3, \dots\} \cap \{0, 1, 2, \dots\} = \{0\}$$

گزینه‌ی (۳): $N \cap (Q' - R) = N \cap \emptyset = \emptyset$

گزینه‌ی (۴): $(Q' - N) \cup Q = Q' \cup Q = R$

۶. گزینه‌ی ۱

از آنجا که $C - A = \emptyset$ است، می‌توان نتیجه گرفت:

$$C \subseteq A$$

در بین مجموعه‌های Z, W و Q' ، مجموعه‌ی W زیرمجموعه‌ی Z است، بنابراین:

$$A = Z, C = W$$

لذا:

$$B = Q'$$

بنابراین داریم:

$$A - (B \cup C) = Z - (Q' \cup W) = \{-1, -2, \dots\}$$

راهبرد حل تیب (۲)

[۱] همواره به باز یا بسته بودن ابتدا و انتهای بازه توجه کنید.

[۲] اگر عدد k متعلق به بازه‌ی (a, b) باشد، آنگاه:

$$a < k < b$$

۷. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): درست است، زیرا هر یک از بازه‌های باز و نیم‌باز a و b ، زیرمجموعه‌ی بازه‌ی بسته‌ی a و b هستند، یعنی:

$$(a, b) \subset [a, b) \subset [a, b]$$

گزینه‌ی (۲): درست است، زیرا تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.

گزینه‌ی (۳): نادرست است، زیرا عضو یک از مجموعه‌ی $\{-2, 1\}$ ، متعلق به بازه‌ی $(-3, 0)$ نیست، پس $\{-2, 1\} \not\subset (-3, 0)$.

گزینه‌ی (۴): درست است، زیرا دو بازه‌ی (a, b) و $[a, b)$ با هم برابر نیستند.

۸. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): $0 \in (-3, 0]$ (درست است)

گزینه‌ی (۲): $\frac{-5}{2} \notin \left[\frac{-5}{2}, 2 \right]$ (درست است)

گزینه‌ی (۳): $\mathbb{R} - (2, 3] = (-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$

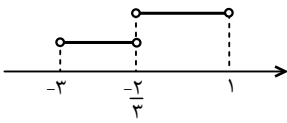
پس: $2 \notin (-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$

نادرست است.

گزینه‌ی (۴): $\mathbb{R} - (2, 3) = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

پس: $3 \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ (درست است)

اجتماع دو بازه‌ی فوق برابر است با:



$$(-3, \frac{-2}{3}) \cup (\frac{-2}{3}, 1) = (-3, 1) - \{\frac{-2}{3}\}$$

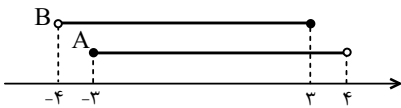
۱۶. گزینه‌ی ۱

$$A = [-3, 4)$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid (-x) \in A\}$$

$$-3 \leq -x < 4 \Rightarrow -4 < x \leq 3$$

$$\Rightarrow B = (-4, 3]$$



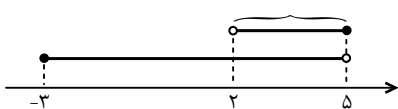
$$A - B = [-3, 4) - (-4, 3] = (3, 4)$$

۱۷. گزینه‌ی ۴

با مشخص کردن بازه‌ها روی محور اعداد، حاصل هر یک از عبارتها را به دست می‌آوریم:

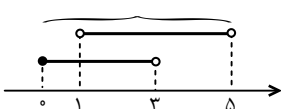
گزینه‌ی (۱):

$$[-3, 5) \cap (2, 5) = (2, 5) \xrightarrow{\in \mathbb{N}} 3, 4$$



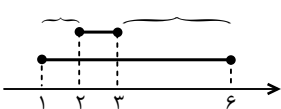
گزینه‌ی (۲):

$$[0, 3) \cup (1, 5) = [0, 5) \xrightarrow{\in \mathbb{N}} 1, 2, 3, 4$$



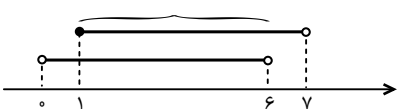
گزینه‌ی (۳):

$$[1, 6] - [2, 3] = [1, 2) \cup (3, 6] \xrightarrow{\in \mathbb{N}} 1, 4, 5, 6$$



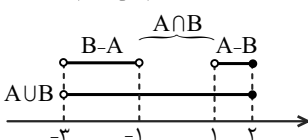
گزینه‌ی (۴):

$$(0, 6) \cap [1, 7) = [1, 6) \xrightarrow{\in \mathbb{N}} 1, 2, 3, 4, 5$$



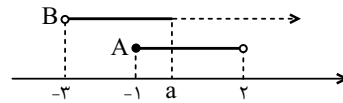
۱۸. گزینه‌ی ۴

ابتدا نمایش هندسی مجموعه‌های داده شده را رسم می‌کنیم:



۱۲. گزینه‌ی ۱

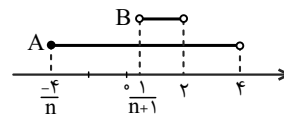
نمایش هندسی دو بازه را رسم می‌کنیم.



چون اشتراک دو مجموعه غیر تهی است، پس a باید عددی بزرگتر یا مساوی -1 باشد؛ لذا $a \geq -1$.

۱۳. گزینه‌ی ۱

اگر n عددی طبیعی باشد، $\frac{-4}{n}$ عددی منفی و $\frac{1}{n+1}$ عددی مثبت خواهد بود، بنابراین نمایش هندسی دو بازه به صورت زیر است:



بنابراین اشتراک دو بازه برابر است با:

$$A \cap B = (\frac{1}{n+1}, 2)$$

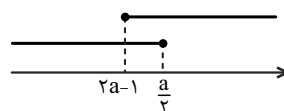
از طرفی $\frac{1}{n+1}$ همواره مثبت و کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{2}$ است؛ زیرا:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

بنابراین در بازه‌ی $(\frac{1}{n+1}, 2)$ فقط عدد صحیح یک وجود دارد.

۱۴. گزینه‌ی ۱

نمایش هندسی بازه‌ها می‌تواند به صورت زیر باشد:

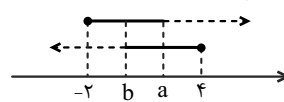


برای اینکه اجتماع دو بازه‌ی فوق برابر با مجموعه‌ی اعداد حقیقی (\mathbb{R}) شود، باید:

$$2a-1 \leq \frac{a}{2} \Rightarrow 2a - \frac{a}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{3a}{2} \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

۱۵. گزینه‌ی ۴

نمایش هندسی دو بازه را رسم می‌کنیم:



بنابراین: $(b, 4] \cap [-2, a) = (\frac{-2}{3}, 1) \Rightarrow b = \frac{-2}{3}, a = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b, a) = (\frac{-2}{3}, 1) \\ (-2a-1, b) = (-2 \times 1 - 1, \frac{-2}{3}) = (-3, \frac{-2}{3}) \end{cases}$$

گزینه‌ی (۳): نامتناهی است؛ زیرا بی‌شمار خط وجود دارد که از مبدأ عبور می‌کند.

گزینه‌ی (۴): متناهی است.

۲۳. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): نامتناهی است، زیرا بر یک دایره، بی‌شمار خط مماس، قابل رسم است.

گزینه‌ی (۲): بین هر دو عدد گویای دلخواه می‌توان بی‌شمار عدد گویا قرار داد، پس این مجموعه نامتناهی است.

توجه کنید که اگر a و b دو عدد گویا باشند، آنگاه $\frac{a+b}{2}$ بین a و b است.

گزینه‌ی (۳): بازه‌ی (a, b) نامتناهی است. $(b > a)$

گزینه‌ی (۴): در میان اعداد حقیقی مثبت، عددی که با معکوس خود برابر است تنها عدد ۱ است، پس این مجموعه متناهی است.

۲۴. گزینه‌ی ۱

الف- درست است. وقتی مجموعه متناهی و ناتهی است، دارای بزرگترین و کوچکترین عضو است، به عنوان مثال در مجموعه‌ی $\{-1, 2, 4\}$ بزرگترین عضو ۴ و کوچکترین عضو -۱ است.

ب- درست نیست. به عنوان مثال مجموعه‌ی $A = [0, 2]$ نامتناهی است ولی دارای عضو ماکزیمم ۲ و عضو می‌نیمم صفر است.

۲۵. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱):

نامتناهی: $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 > 25\} = \{6, 7, 8, \dots\}$

گزینه‌ی (۲): $A_2 = \{x \mid 1000 \text{ عدد اول بزرگتر از } x\}$
نامتناهی: $\{1009, 1013, \dots\}$

گزینه‌ی (۳): $A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 9, x < 100\}$
متناهی: $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$

گزینه‌ی (۴): $A_4 = \{x \mid 100 \text{ عدد حقیقی کوچکتر از } x\}$
نامتناهی: $(-\infty, 100)$

۲۶. گزینه‌ی ۱

گزینه‌ی (۱):

متناهی: $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } x^2 < 1000\} = \{1, 2, 3, \dots, 31\}$

گزینه‌ی (۲): مجموعه‌ی اعداد گویا در هر بازه‌ی نامتناهی است.

گزینه‌ی (۳): نامتناهی: $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 53\} = \{54, 55, \dots\}$

گزینه‌ی (۴):

نامتناهی: $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -x \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -3, -2, -1\}$

۲۷. گزینه‌ی ۳

$C = \{x^3 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 10\} = \{1, 8, 27, 64, \dots, 10^3\}$

سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): این مجموعه نامتناهی است، چون بی‌نهایت عدد حقیقی کوچک‌تر از ۵ وجود دارد.

با توجه به نمودار، مشخص است که:

$$A \cap B = [-1, 1]$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A$$

از طرفی داریم:

بنابراین:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) = (1, 2] \cup [-1, 1] = [-1, 2]$$

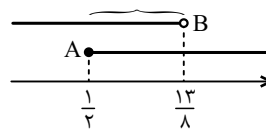
پس مجموعه‌ی A ، شامل چهار عدد صحیح ۲، ۱، ۰، -۱ است.

۱۹. گزینه‌ی ۱

$$A: 3x - 1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 3x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$B: 4x - \frac{3}{2} < 5 \Rightarrow 4x < \frac{13}{2} \Rightarrow x < \frac{13}{8} \Rightarrow B = (-\infty, \frac{13}{8})$$

$$C: x - 4 \leq 0 \xrightarrow{x \in \mathbb{W}} C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

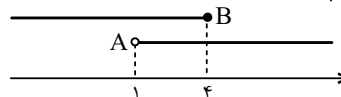


$$\Rightarrow (A \cap B) - C = [\frac{1}{2}, \frac{13}{8}) - \{0, 1, 2, 3, 4\} = [\frac{1}{2}, \frac{13}{8}) - \{1\}$$

۲۰. گزینه‌ی ۱

$$A = (1, +\infty) \text{ و } B = (-\infty, 4]$$

با رسم نمودار هندسی داریم:



$$A - B = (1, +\infty) - (-\infty, 4] = (4, +\infty) \quad \text{لذا:}$$

$$B - A = (-\infty, 4] - (1, +\infty) = (-\infty, 1]$$

$$(A - B) \cup (B - A) = (4, +\infty) \cup (-\infty, 1] \quad \text{پس:}$$

$$= (-\infty, 1] \cup (4, +\infty) = \mathbb{R} - (1, 4]$$

راهبرد حل تیب (۴)

اگر تعداد اعضای یک مجموعه قابل شمارش باشد (هر چقدر هم که آن مجموعه بزرگ باشد)، آنگاه مجموعه متناهی است. توجه کنید که بازه‌ی $[a, b]$ یک مجموعه نامتناهی است.

۲۱. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی اعداد صحیح نایبتر از -۱، نامتناهی است، این مجموعه برابر است با: $\{\dots, -3, -2, -1\}$

همچنین مجموعه‌ی اعداد اعشاری بین $0/4$ و $0/7$ نامتناهی است.

مجموعه‌ی اعداد صحیح ۱۷ رقمی، مجموعه‌ای متناهی است.

مجموعه‌ی اعداد صحیح و مکعب کامل کوچکتر از ۱۰۰۰ نامتناهی است زیرا: $\{\dots, 7^3, 8^3, 9^3\}$

۲۲. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): مجموعه‌ی اعداد اول زوج برابر $\{2\}$ است؛ پس متناهی است.

گزینه‌ی (۲): متناهی است.

۳۰. گزینه‌ی ۳

ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \dots \right\}$$

$$A - B = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots \right\} \quad \text{گزینه‌ی (۱): نامتناهی}$$

$$B - A = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \dots \right\} \quad \text{گزینه‌ی (۲): نامتناهی}$$

$$A \cap B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\} \quad \text{گزینه‌ی (۳): متناهی}$$

گزینه‌ی (۴): مجموعه‌های A و B نامتناهی هستند و اجتماع هر دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

۳۱. گزینه‌ی ۴

$$W \cap Z = W \quad \text{گزینه‌ی (۱): نامتناهی}$$

$$R - Q' = Q \quad \text{گزینه‌ی (۲): نامتناهی}$$

گزینه‌ی (۳): مجموعه‌ی $Q - N$ از اعداد گویاست که شامل اعداد طبیعی نیست و همچنان نامتناهی است.

$$N - W = \{ \} \quad \text{گزینه‌ی (۴): متناهی}$$

۳۲. گزینه‌ی ۴

$$A = \{ 2, 3, 5, 7, 11, \dots \} \quad \text{مجموعه‌ی اعداد اول}$$

$$B = \{ 1, 3, 5, 7, 9, \dots \} \quad \text{مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد}$$

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 5, \dots \} \quad \text{گزینه‌ی (۱): نامتناهی}$$

$$A \cap B = \{ 3, 5, 7, 11, \dots \} \quad \text{گزینه‌ی (۲): نامتناهی}$$

$$B - A = \{ 1, 9, 15, 21, \dots \} \quad \text{گزینه‌ی (۳): نامتناهی}$$

$$A - B = \{ 2 \} \quad \text{گزینه‌ی (۴): متناهی}$$

۳۳. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): درست است، به‌عنوان مثال:

$$\begin{cases} A = Z \\ B = N \end{cases} \Rightarrow A \cap B = N \rightarrow \text{نامتناهی}$$

گزینه‌ی (۲): درست است، چون مجموعه‌های A و B نامتناهی هستند و اجتماع آن‌ها که تمام اعضای A و تمام اعضای B را شامل می‌شود، مجموعه‌ی نامتناهی است.

گزینه‌ی (۳): درست است، به‌عنوان مثال:

$$\begin{cases} A = \{ \dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \} \\ B = \{ 4, 5, 6, \dots \} \end{cases} \rightarrow A \cap B = \{ 4 \} \rightarrow \text{متناهی}$$

گزینه‌ی (۲): این مجموعه نامتناهی است، زیرا:

$$1 - x < 3 \Rightarrow x > 1 - 3 \Rightarrow x > -2$$

$$\Rightarrow B = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$$

گزینه‌ی (۴): این مجموعه نامتناهی است، زیرا:

$$D = \{ -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

۲۸. گزینه‌ی ۱

هر یک از مجموعه‌ها را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم:

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مضرب ۴ باشند ولی مضرب ۲ نباشند، برابر با تهی است، زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد، حتماً مضرب ۲ نیز خواهد بود. مجموعه‌ی تهی، متناهی است.

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبتی که در تقسیم بر ۳، باقیمانده‌ی ۱ دارند، برابر است با:

$$\{ 3k + 1 \mid k \in \mathbb{W} \} = \{ 1, 4, 7, 10, \dots \}$$

بنابراین این مجموعه نامتناهی است.

پ) مجموعه‌ی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از -۱ برابر است با: $\{ 0 \}$ که متناهی است.

ت) مجموعه اعداد گویایی که مربعشان با خودش برابر است:

$$\{ a \in \mathbb{Q} \mid a^2 = a \}$$

$$a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, 1$$

بنابراین مجموعه‌ی فوق برابر با $\{ 0, 1 \}$ است که متناهی است.

۲۹. گزینه‌ی ۱

ابتدا اعضای هر یک از مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{4}{n} \in \mathbb{Z} \right\} = \{ \pm 4, \pm 2, \pm 1 \} \rightarrow \text{متناهی}$$

$$B = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{Z} \right\} = \{ -1, 1 \} \rightarrow \text{متناهی}$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{W} \mid \frac{1}{n} < 1 \right\} = \{ 2, 3, 4, \dots \} \rightarrow \text{نامتناهی}$$

راهبرد حل تپ (۵)

[۱] در موارد زیر، می‌توان در مورد متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ی حاصل، اظهار نظر قطعی کرد:

$$\begin{aligned} \{ \text{نامتناهی} \} \cup \{ \text{هر مجموعه‌ای} \} &= \{ \text{نامتناهی} \} \\ \{ \text{متناهی} \} \cap \{ \text{هر مجموعه‌ای} \} &= \{ \text{متناهی} \} \\ \{ \text{متناهی} \} - \{ \text{هر مجموعه‌ای} \} &= \{ \text{متناهی} \} \\ \{ \text{نامتناهی} \} - \{ \text{متناهی} \} &= \{ \text{نامتناهی} \} \\ \{ \text{متناهی} \} - \{ \text{نامتناهی} \} &= \{ \text{متناهی} \} \\ \{ \text{متناهی} \} \cap \{ \text{هر عملیاتی} \} &= \{ \text{متناهی} \} \end{aligned}$$

در بقیه‌ی موارد نمی‌توان در حالت کلی اظهار نظر قطعی کرد.

[۲] کافی است مجموعه‌ی A، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ی A نامتناهی است.

$$\{ \text{نامتناهی} \} \subseteq A \Rightarrow A \text{ نامتناهی است.}$$

اگر A، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی باشد، آنگاه A متناهی است.

$$A \subseteq \{ \text{متناهی} \} \Rightarrow A \text{ متناهی است.}$$

۳۹. گزینه‌ی ۲

مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < -2\}$ برابر است با: $\{-3, -4, \dots\}$ که یک مجموعه‌ی نامتناهی است. بنابراین مجموعه‌ی A یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی دارد، در نتیجه خود مجموعه‌ی A نیز نامتناهی است.

مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{W} \mid 1 < x < 158\}$ برابر است با:

$$\{2, 3, \dots, 157\}$$

که یک مجموعه‌ی متناهی است، بنابراین مجموعه‌ی B ، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی است، در نتیجه خود مجموعه‌ی B نیز متناهی است.

۴۰. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، می‌تواند متناهی باشد.

$$A = \{1, 3, 5, \dots\} \quad B = \{2, 4, 6, \dots\} \quad \text{متناهی: } A \cap B = \emptyset$$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی، می‌تواند متناهی باشد. متناهی: $W - N = \{0\}$

گزینه‌ی (۳): نادرست است، زیرا اگر $A \subset B$ و B نامتناهی باشد، A می‌تواند متناهی باشد.

$$A = \{1, 2\} \quad \text{متناهی: } A \subset B \Rightarrow B = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \text{نامتناهی:}$$

گزینه‌ی (۴): درست است، زیرا اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، الزاماً هر یک از مجموعه‌های A و B نامتناهی‌اند.

راهبرد حل تیپ (۶)

[۱] اگر U مجموعه‌ی مرجع و $A \subset U$ باشد، متمم مجموعه‌ی A برابر است با:

$$A' = U - A$$

[۲] برای ساده کردن عبارت‌ها، می‌توان از خواص متمم مجموعه‌ها استفاده کرد:

$$(A')' = A$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

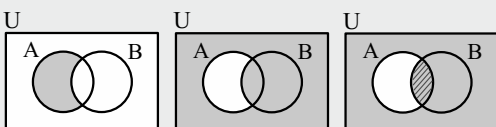
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$A - B = A \cap B'$$

[۳] اگر $A \subset B$ ، آنگاه $A' \subset B'$.

[۴] در بعضی موارد بهتر است برای به دست آوردن حاصل عبارت‌ها، از نمودار ون استفاده کرد و عملیات هر مرحله را روی آن نشان داد. به عنوان مثال:

$$(A \cap B')' \cap A = (A - B)' \cap A$$



$$A - B$$

$$(A - B)'$$

$$(A - B)' \cap A = A \cap B$$

توجه کنید که برای رسم نمودار ون دو مجموعه، آنها را در حالت کلی باید رسم کنید، یعنی دو مجموعه که در قسمتی با هم اشتراک دارند.

گزینه‌ی (۴): نادرست است، به عنوان مثال:

$$\begin{cases} A = \{3, 4, 5, \dots\} \\ B = \{4, 5, 6, \dots\} \end{cases} \rightarrow A - B = \{3\} \rightarrow \text{متناهی}$$

۳۴. گزینه‌ی ۴

می‌دانیم مجموعه‌ی اعداد اول و مجموعه‌ی اعداد زوج نامتناهی هستند و تنها عدد زوج اول عدد ۲ است که در مجموعه‌های A و B وجود ندارد. بنابراین:

$$A \cap B = \emptyset, \quad B - A = B \quad \text{و} \quad A - B = A$$

پس $A \cap B$ متناهی و $A - B$ و $B - A$ هر دو نامتناهی است. پس گزینه‌ی «۴» نادرست است.

۳۵. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی و متناهی، همواره متناهی است، پس $A \cap B$ متناهی است.

گزینه‌ی (۲): تفاضل هر مجموعه‌ای از یک مجموعه‌ی متناهی، همواره متناهی است، پس $B - A$ متناهی است.

گزینه‌ی (۳): تفاضل یک مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره نامتناهی است، پس $A - B$ نامتناهی است.

گزینه‌ی (۴): به کمک نمودار ون می‌توان نشان داد که $(A - B) - A = \emptyset$ است که مجموعه‌ی تهی، متناهی است.

۳۶. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی A متناهی است و اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای، متناهی خواهد بود؛ بنابراین مجموعه‌ی $A \cap (B \cup C)$ متناهی است.

از آنجا که مجموعه‌ی A متناهی است، بنابراین مجموعه‌ی $A \cap C$ نیز متناهی است. مجموعه‌ی B نامتناهی است و تفاضل مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره نامتناهی خواهد بود، بنابراین مجموعه‌ی $B - (A \cap C)$ نامتناهی است.

۳۷. گزینه‌ی ۳

اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی همواره مجموعه‌ای نامتناهی نیست. به مثال زیر توجه کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \quad \text{و} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{0\}$$

برای بقیه‌ی گزینه‌ها، مثال‌های مناسب بیاورید.

۳۸. گزینه‌ی ۴

فرض کنید B مجموعه‌ی اعداد طبیعی و A مجموعه‌ی زیر باشد:

$$B = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$A = \{2, 3, 4, \dots\}$$

$$\Rightarrow B - A = \{1\} \quad \text{مجموعه‌ای متناهی است.}$$

حال فرض کنید $B = (-1, 2)$ و $A = (0, 2)$ ، آنگاه:

$$A \subset B$$

$$B - A = (-1, 0]$$

که مجموعه‌ای نامتناهی است. پس $B - A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

$$A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = \{۳۶\}$$

$$\Rightarrow n(A - B') = ۱$$

۵۰. گزینه ۲

هر چه تعداد عضوی یک مجموعه کمتر باشد، تعداد عضوی متمم آن مجموعه بیشتر خواهد بود. بنابراین کافی است تعداد عضوی هر یک از مجموعه‌ها را مشخص کنیم. توجه کنید که هر یک از مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع داده شده هستند.

گزینه ۱):

$$۱۰ = \text{تعداد اعضا} \rightarrow \{۱, ۳, ۵, \dots, ۱۹\} = \text{اعداد فرد}$$

گزینه ۲):

$$۲ = \text{تعداد اعضا} \rightarrow \{۱, ۳\} = \text{مقسوم‌علیه‌های عدد ۳}$$

گزینه ۳):

$$۸ = \text{تعداد اعضا} \rightarrow \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\} = \text{اعداد اول}$$

$$۴ = \text{تعداد اعضا} \rightarrow \{۱, ۴, ۹, ۱۶\} = \text{مربع کامل}$$

بنابراین تعداد عضوی مجموعه‌ی گزینه ۲) از بقیه کمتر است، در نتیجه تعداد عضوی مجموعه‌ی متمم آن از بقیه بیشتر خواهد بود.

۵۱. گزینه ۳

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < 2 - x \leq 5\}$$

$$-1 < 2 - x \leq 5 \xrightarrow{\times(-1)} -5 \leq x - 2 < 1 \xrightarrow{+2} -3 \leq x < 3$$

$$\Rightarrow A = [-3, 3)$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x+3}{x} \in \mathbb{W} \right\}$$

$$\frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$$

برای آنکه عبارت $2 + \frac{3}{x}$ عضو مجموعه‌ی اعداد حسابی باشد، باید x عضوی از مجموعه‌ی زیر باشد:

$$B = \{1, \pm 3\}$$

$$A \cap B' = A - B$$

بنابراین:

$$= [-3, 3) - \{1, \pm 3\} = (-3, 3) - \{1\}$$

مجموعه‌ی فوق فقط شامل عدد طبیعی ۲ است.

۵۲. گزینه ۴

گزینه‌های (۱) و (۲): مجموعه‌ی نامتناهی A را اعداد طبیعی زوج فرض می‌کنیم و متمم آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد است که نامتناهی است. حال اگر مجموعه‌ی نامتناهی A را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$A = \{۴, ۵, ۶, \dots\} \rightarrow A' = \{۱, ۲, ۳\}$$

پس A' مجموعه‌ای متناهی است. بنابراین اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، ممکن است مجموعه‌ی A' متناهی یا نامتناهی باشد. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) در حالت کلی، درست نیستند.

گزینه‌های (۳) و (۴): اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، A' همواره نامتناهی است، زیرا مجموعه‌ی مرجع N نامتناهی است.

در حالت کلی:

$$A \subset N \Rightarrow A \cup A' = N$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{نامتناهی} & \text{نامتناهی} & \text{متناهی} \end{array}$$

پس گزینه ۳) نادرست و گزینه ۴) درست است.

۴۱. گزینه ۳

مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت:

$$N' = Z - N = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

۴۲. گزینه ۲

$$W' = Z - W = \{-1, -2, -3, \dots\} = \{-k \mid k \in N\}$$

۴۳. گزینه ۲

$$-2/1 \notin N \Rightarrow -2/1 \in N'$$

گزینه ۱):

$$۲\sqrt{5} \text{ عددی گنگ است و } R - Q' = Q \text{ پس:}$$

$$۲\sqrt{5} \notin (R - Q')$$

$$-\frac{0/1}{3} = -\frac{1}{3^0} \in Q$$

گزینه ۳):

$$\sqrt{2} \notin Z \Rightarrow \sqrt{2} \in Z'$$

گزینه ۴):

۴۴. گزینه ۴

$$A = \{x \in N \mid x^2 < 100\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$A' = N - A = \{10, 11, 12, \dots\} = \{x \in N \mid x > 9\}$$

۴۵. گزینه ۳

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} = (1, +\infty)$$

$$\rightarrow A' = \mathbb{R} - (1, +\infty) = (-\infty, 1]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} = (-\infty, -1]$$

$$\rightarrow B' = \mathbb{R} - (-\infty, -1] = (-1, +\infty)$$

$$\Rightarrow A' \cap B' = (-\infty, 1] \cap (-1, +\infty) = (-1, 1]$$

۴۶. گزینه ۱

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$= \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7, 8\}$$

۴۷. گزینه ۳

$$A = \{۸, ۹, ۱۰, \dots\} \Rightarrow A' = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۷\}$$

$$B = \{۵, ۶, ۸\}$$

$$\Rightarrow A' \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$$

پس مجموعه‌ی $A' \cup B$ ، ۸ عضوی است.

۴۸. گزینه ۱

$$A = \{\underline{۴}, ۵, ۶\} \text{ و } B' = \{1, 2, 3, \underline{۴}\}$$

$$A - B = A \cap B' = \{۴\}$$

۴۹. گزینه ۴

$$A = \{۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, \dots, ۹۶\}$$

$$B = \{۴, ۱۶, ۳۶, ۶۴, ۱۰۰\}$$

۵۳. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱):

$$A' \cup \frac{U}{\emptyset} = A' \cup U = U$$

گزینه‌ی (۲):

$$(A \cup \frac{U}{\emptyset}) \cup U = \underbrace{(A \cup \emptyset)}_A \cup U = A \cup U = U$$

گزینه‌ی (۳):

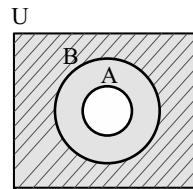
$$\underbrace{(A \cap \emptyset)}_{\emptyset} \cup A' = \emptyset \cup A' = A'$$

گزینه‌ی (۴):

$$\underbrace{(A' \cap \emptyset)}_{\emptyset} \cup A = \emptyset \cup A = A$$

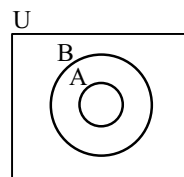
۵۴. گزینه‌ی ۴

با توجه به نمودار ون دیده می‌شود که $B' \subset A'$ است. قسمت سایه زده شده مجموعه‌ی A' و قسمت هاشورخورده مجموعه‌ی B' را نمایش می‌دهد.



۵۵. گزینه‌ی ۳

با توجه به نمودار ون داریم:



گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا:

$$A \subset B \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow A' \cup B' = A'$$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا:

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$

گزینه‌ی (۳): درست است.

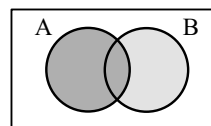
با توجه به نمودار ون، $A' \cup B = U$ است (نمودار بالا را هاشور بزنید).

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا:

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

۵۶. گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار ون زیر، داریم:



$$A \cup (B - A) = A \cup B$$

در نتیجه متمم $A \cup (B - A)$ برابر است با:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' = A' - B$$

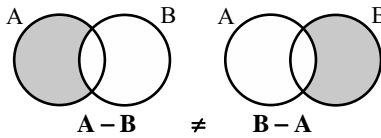
۵۷. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱):

$$A \cap B' = A - B$$

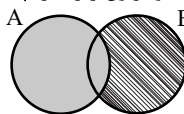
$A - B$ در صورتی برابر با تهی می‌شود که $A \subseteq B$ باشد که از $A \cup B = U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq B$ است.

گزینه‌ی (۲):



در هیچ حالتی $A - B = B - A$ نیست مگر اینکه $A = B$ باشد که از $A \cup B = U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A = B$ است.

گزینه‌ی (۳): با توجه به نمودار ون زیر، داریم:



$$A' = U - A = (A \cup B) - A = B - A$$

گزینه‌ی (۴):

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = U - (A \cap B)$$

عبارت بالا در صورتی برابر با U می‌شود که $A \cap B = \emptyset$ باشد که از $A \cup B = U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A \cap B = \emptyset$ است.

۵۸. گزینه‌ی ۲

$$A = \{ \text{شماره‌های اول عدد } 30 \} = \{ 2, 3, 5 \}$$

$$B = \{ 2k - 1 \mid k \in A \} = \{ 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, 2 \times 5 - 1 \} = \{ 3, 5, 9 \}$$

$$A - (A \cap B') = A - (A - B) \quad \text{بنابراین:}$$

$$= \{ 2, 3, 5 \} - (\{ 2, 3, 5 \} - \{ 3, 5, 9 \})$$

$$= \{ 2, 3, 5 \} - \{ 2 \} = \{ 3, 5 \} \rightarrow \text{تعداد اعضا} = 2$$

نکته با استفاده از نمودار ون می‌توان نشان داد:

$$A - (A - B) = A \cap B$$

۵۹. گزینه‌ی ۱

ابتدا عبارت را با استفاده از خواص متمم ساده می‌کنیم:

$$(A - B)' \cap (A \cup B)' = ((A - B) \cup (A \cup B))'$$

از طرفی $A - B \subset A$ و همچنین $A \subset A \cup B$ بنابراین:

$$(A - B) \subset (A \cup B)$$

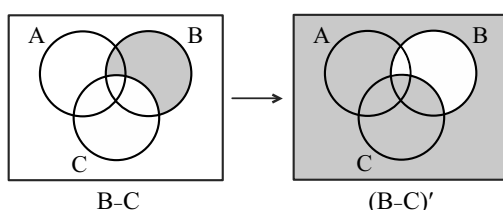
$$\Rightarrow ((A - B) \cup (A \cup B))' = (A \cup B)' = M - (A \cup B)$$

$$= \{ 1, 2, \dots, 10 \} - \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} = \{ 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

بنابراین عدد ۵ عضو مجموعه‌ی فوق نیست.

۶۰. گزینه‌ی ۲

نمودار ون را رسم می‌کنیم:



چون لزوماً $A \cup B = U$ نیست، بنابراین $(A \cup B)'$ لزوماً برابر با مجموعه‌ی تهی نیست.

راهبرد حل تیپ (۸)

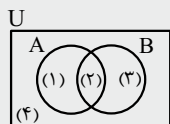
[۱] تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

همچنین رابطه‌ی زیر نیز برقرار است:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

[۲] از نمودار ون نیز می‌توان برای به دست آوردن تعداد اعضا استفاده کرد. به نمودار مقابل توجه کنید.



$$(1) \rightarrow n(A - B)$$

$$(2) \rightarrow n(A \cap B)$$

$$(3) \rightarrow n(B - A)$$

$$(4) \rightarrow n(U - (A \cup B))$$

[۳] به کلمات کلیدی زیر و معادل آنها توجه کنید:

A یا B	$A \cup B$
حداقل عضو یک مجموعه	
A و B	$A \cap B$
عضو هر دو مجموعه	
فقط A	$A - B$
دقیقاً عضو یک مجموعه	$(A - B) \cup (B - A)$
حداکثر عضو یک مجموعه	$U - (A \cap B)$

گزینه‌ی ۱ ۶۴

A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، پس $A \cap B = \emptyset$ و $n(A \cap B) = 0$ ؛ لذا:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 4 + 9 = 13$$

گزینه‌ی ۴ ۶۵

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 25 & 14 & \text{مخالف صفر} \end{matrix}$$

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B تهی نیست و اجتماع دو مجموعه ۲۵ عضو دارد، لذا مجموعه‌ی B حداکثر ۲۵ عضو می‌تواند داشته باشد و در نتیجه اشتراک A و B ، حداکثر ۱۴ عضو می‌تواند داشته باشد.

گزینه‌ی ۱ ۶۶

می‌دانیم A و A' ، دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و $A \cup A' = U$ ، پس:

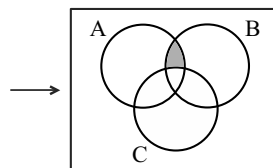
$$n(A \cup A') = n(A) + n(A') = n(U)$$

$$\Rightarrow n(U) = 14 + 10 = 24$$

از طرفی B و B' دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و $B \cup B' = U$ ، پس:

$$n(B \cup B') = n(B) + n(B') = n(U)$$

$$\Rightarrow n(U) = n(B) + 8 = 24 \Rightarrow n(B) = 16$$



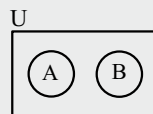
$$A - (B \cap C)'$$

بنابراین برای یافتن اعضای ناحیه‌ی سایه زده شده، کافی است مجموعه‌ی $A \cap C$ را از مجموعه‌ی $A \cap B$ کم کنیم.

$$\begin{aligned} (A \cap B) - (A \cap C) &= \{a, b, c, d\} - \{b, c, e, f\} \\ &= \{a, d\} \end{aligned}$$

راهبرد حل تیپ (۷)

[۱] اگر اشتراک دو مجموعه، تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم (مجزا) می‌گویند و نمودار ون آنها به صورت زیر است:



[۲] برای دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B ، همواره داریم:

$$\begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases} \quad \begin{cases} A \subseteq B' \\ B \subseteq A' \end{cases}$$

گزینه‌ی ۴ ۶۱

$E - F = E$ است، یعنی در مجموعه‌ی E هیچ عضوی وجود ندارد که در مجموعه‌ی F نیز موجود باشد، بنابراین داریم:

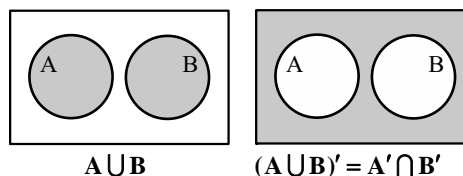
$$E \cap F = \emptyset$$

لذا، دو مجموعه‌ی مذکور هیچ اشتراکی با هم ندارند و دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

گزینه‌ی ۴ ۶۲

A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، یعنی اشتراک آن‌ها تهی است. با توجه به نمودار ون زیر، $A - B = A$ و $B - A = B$ می‌شود. پس داریم:

$$((A - B) \cup (B - A))' = (A \cup B)' = A' \cap B'$$



گزینه‌ی ۱ ۶۳

A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، بنابراین:

$$(A \cap B)' = (\emptyset)' = U \quad \text{گزینه‌ی (۱)}$$

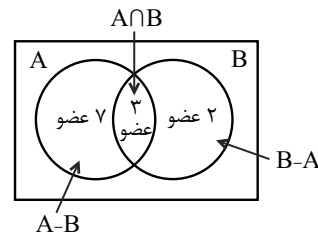
$$A \cup B \subseteq U \quad \text{گزینه‌ی (۲)}$$

$A \cup B$ زیرمجموعه‌ی U است و لزوماً با آن برابر نیست.

$$A - B = A - (A \cap B) = A - \emptyset = A \quad \text{گزینه‌ی (۳)}$$

$$(A \cup B)' = U - (A \cup B) \quad \text{گزینه‌ی (۴)}$$

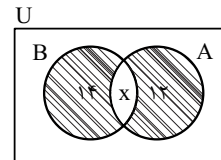
گزینه‌ی ۲. ۶۷. از آنجا که $A - (A \cap B) = A - B$ است، با توجه به نمودار ون زیر، خواهیم داشت:



$$n(A \cup B) = 7 + 3 + 2 = 12$$

گزینه‌ی ۱. ۶۸.

نمودار ون را رسم می‌کنیم. در نمودار فرض می‌کنیم $n(A \cap B) = x$ بنابراین داریم:



$$n(A - B) = \text{اعضایی که در } A \text{ هستند و در } B \text{ نیستند}$$

$$= n(A) - n(A \cap B) = \text{اعضایی که فقط در } A \text{ هستند}$$

به طریق مشابه:

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار:

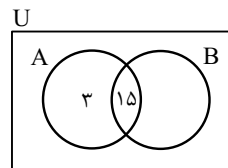
$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 31 = 12 + 14 + x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow n(A \cap B) = 5$$

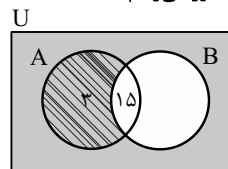
$$\Rightarrow n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = 12 + 5 = 17$$

گزینه‌ی ۱. ۶۹.

نمودار ون را رسم می‌کنیم. چون اشتراک A و B ، ۱۵ عضو دارد، پس ۳ عضو فقط در A هستند ولی در B نیستند.



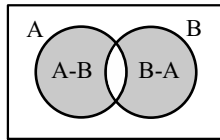
حال مجموعه‌ی $A \cap B' = A - B$ را هاشور می‌زنیم.



با توجه به نمودار $n(A \cap B') = 3$ است.

گزینه‌ی ۱. ۷۰.

$$n(A) = 2m, n(B) = n, n(A \cap B) = \frac{m+n}{2}$$



$$n[(A - B) \cup (B - A)]$$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

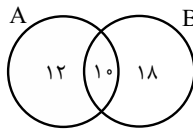
$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

$$= 2m + n - 2\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

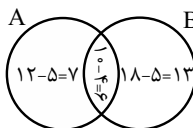
$$= 2m + n - m - n = m$$

گزینه‌ی ۴. ۷۱.

چون مجموعه‌های $(B - A)$ و $(A - B)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند و $(A \cup B)$ دارای ۴۰ عضو است. پس $(A \cap B)$ دارای ۱۰ عضو است. $(40 - 12 - 18) = 10$



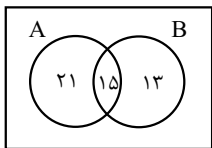
حال اگر از هر کدام از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو کم شود چون از $(A \cap B)$ ، ۴ عضو کم شده، پس از هر یک از مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ باید ۵ عضو کم شود.



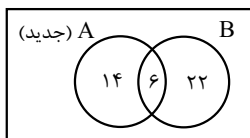
$$\Rightarrow n(A \cup B) = 7 + 6 + 13 = 26$$

گزینه‌ی ۳. ۷۲.

نمودار ون زیر را داریم:



اگر ۱۶ عضو از A کم کنیم، ۹ عضو از اشتراک کم می‌شود (طبق صورت سؤال) و $(A - B)$ کم می‌شود و نمودار به صورت زیر درمی‌آید.

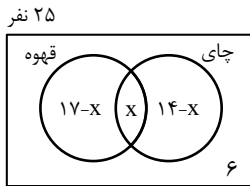


$$n(A \cup B) = 14 + 6 + 22 = 42$$

دقت کنید که چون B دارای ۲۸ عضو است وقتی تعداد اعضای اشتراک برابر ۶ باشد، در نتیجه، تعداد اعضای $(B - A)$ هم $28 - 6 = 22$ است.

۷۷. گزینه‌ی ۳

اگر x تعداد نفراتی باشد که هم چای نوشیده‌اند و هم قهوه، با توجه به نمودار ون زیر، خواهیم داشت:



$$25 = 17 - x + x + 14 - x + 6 \Rightarrow 25 = 37 - x$$

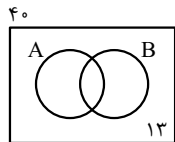
$$\Rightarrow x = 12$$

(هر دو نوع نوشیدنی را نوشیده‌اند) $n(U) - n$ (حداکثر یک نوع نوشیدنی نوشیده‌اند) n

$$= 25 - x = 25 - 12 = 13$$

۷۸. گزینه‌ی ۴

اگر مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی افراد فوتبالیست و مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی افرادی والیبالیست در نظر بگیریم، داریم:



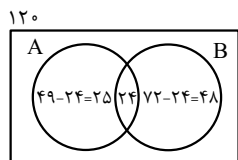
$$n(A) = 13$$

$$n(B) = 17$$

مجموعه افرادی که حداقل یکی از دو رشته را بازی می‌کنند، یعنی فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند برابر با $A \cup B$ است. بنابراین با توجه به نمودار ون بالا خواهیم داشت:

$$40 = n(A \cup B) + 13 \Rightarrow n(A \cup B) = 40 - 13 = 27$$

۷۹. گزینه‌ی ۳

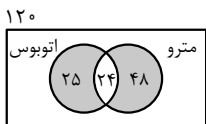


نمودار ون به صورت مقابل خواهد بود:

A: اتوبوس

B: مترو

مجموعه افرادی که دقیقاً از یکی از دو وسیله استفاده کرده‌اند، معادل است با مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ یعنی فقط اتوبوس یا فقط مترو که در نمودار زیر سایه زده شده است:

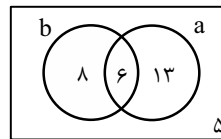


$$73 = 25 + 48 = \text{تعداد نفراتی که دقیقاً از یکی از دو وسیله استفاده کرده‌اند.}$$

۸۰. گزینه‌ی ۲

۱۰ نفر تنیس روی میز، ۱۰ نفر بیلیارد و ۳ نفر مشترک بین آن‌ها هستند، پس $10 + 10 - 3 = 17$ نفر، تنیس روی میز یا بیلیارد بازی می‌کنند.

۷۳. گزینه‌ی ۲



a: درس تاریخ

b: درس جغرافی

با توجه به نمودار، تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر است با:
 $8 + 13 + 6 + 5 = 32 = \text{تعداد دانش‌آموزان کلاس}$

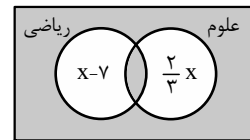
۷۴. گزینه‌ی ۲

در نمودار ون زیر، کسانی که یا در هر دو درس نمره‌ی بالای ۱۵ نگرفته‌اند یا در هیچ‌کدام نمره‌ی بالای ۱۵ نگرفته‌اند، در ناحیه‌ی سایه زده قرار دارند و تعداد آنها برابر با ۱۲ است، بنابراین:

$$x - 7 + \frac{2}{3}x + 12 = 2x$$

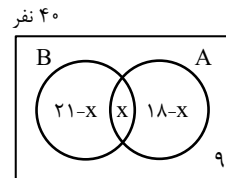
$$\Rightarrow \frac{x}{3} = 5$$

$$\Rightarrow x = 15 \Rightarrow 2x = 30$$



۷۵. گزینه‌ی ۴

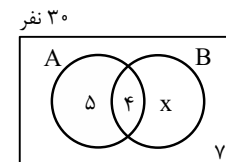
اگر مجموعه‌ی A افرادی باشند که در فوق برنامه‌ی هنری و مجموعه‌ی B افرادی باشند که در فوق برنامه‌ی علمی شرکت کرده‌اند و تعداد کل افرادی که در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند را x در نظر بگیریم، داریم:



$$40 = (21 - x) + x + (18 - x) + 9 \Rightarrow x = 48 - 40 = 8$$

۷۶. گزینه‌ی ۱

اگر A را مجموعه‌ی افراد شرکت‌کننده در برنامه‌های پژوهشی و B را مجموعه‌ی افراد شرکت‌کننده در برنامه‌های پرورشی در نظر بگیریم، با توجه به نمودار ون زیر خواهیم داشت:



$$30 = 5 + 4 + x + 7$$

$$\Rightarrow x = 30 - 16 = 14$$

افرادی که فقط در برنامه‌های پرورشی شرکت کرده‌اند برابر با $B - A$ است، لذا:

$$n(B - A) = x = 14$$

$$\frac{\Delta a_{20} - a_{24}}{4} = \frac{\Delta(20a + b) - (24a + b)}{4} \quad \text{گزینه‌ی (۳)}$$

$$= \frac{100a + \Delta b - 24a - b}{4} = \frac{76a + \Delta b}{4}$$

$$= 19a + b = a_{19} \neq a_{13}$$

$$\frac{\Delta a_8 + a_{38}}{6} = \frac{\Delta(8a + b) + (38a + b)}{6} \quad \text{گزینه‌ی (۴)}$$

$$= \frac{40a + \Delta b + 38a + b}{6} = \frac{78a + \Delta b}{6} = 13a + b = a_{13}$$

۸۴. گزینه‌ی ۱

در هر طرح، ۴ مثلث ثابت است و سه قطعه به قطعات وسط اضافه می‌شود:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{10} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 4 & 4+1 \times 3 & 4+2 \times 3 & 4+3 \times 3 & \dots & 4+9 \times 3 = 31 \end{array}$$

۸۵. گزینه‌ی ۳

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	...
تعداد مربع‌ها	۵	۹	۱۳	...

بنابراین در مرحله‌ی اول ۵ مربع داریم و با توجه به جدول در هر مرحله ۴ مربع اضافه می‌شود، پس در مرحله‌ی دهم $4 \times 10 + 1$ یعنی ۴۱ مربع داریم.

۸۶. گزینه‌ی ۲

در طرح (۱)، ۱۰ چوب‌کبریت و در طرح (۲)، ۱۵ چوب‌کبریت و در طرح (۳)، ۲۰ چوب‌کبریت داریم، بنابراین در هر مرحله ۵ چوب‌کبریت اضافه می‌شود، پس فرمول کلی برای تعداد چوب‌کبریت‌ها در هر مرحله به صورت $a_n = 5n + 5$ است، لذا:

$$245 = 5n + 5 \Rightarrow 240 = 5n \Rightarrow n = 48$$

۸۷. گزینه‌ی ۱

در مرحله‌ی اول ۴ مربع، در مرحله‌ی دوم ۱۰ مربع و در مرحله‌ی سوم ۱۶ مربع داریم، بنابراین در هر مرحله ۶ مربع اضافه می‌شود. یعنی هر مرحله، شماره‌ی مرحله در ۶ ضرب می‌شود و ۲ واحد از آن کسر می‌شود، لذا در مرحله‌ی هفتم داریم:

$$6 \times 7 - 2 = 40 = 6 \times 7 - 2 = 40$$

راهبرد حل تیپ (۱۰)

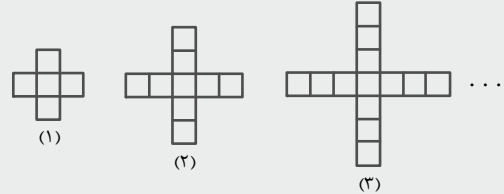
برای یافتن الگوی ریاضی برای شکل‌ها، ابتدا باید تشخیص دهیم الگوی خطی است یا غیر خطی. اگر اختلاف شکل‌های متوالی، مقدار ثابتی نباشد، الگو غیر خطی است.

متداول‌ترین الگوی غیر خطی، الگوی درجه‌ی دوم است که معمولاً در هر شکل یک مضرب مربع (an^2) داریم و یک مقدار خطی که در هر مرحله به شکل اضافه می‌شود ($bn + c$) که در نهایت جمله‌ی عمومی الگو به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ خواهد بود.

یکی از الگوهای درجه‌ی دو معروف، الگوی مثلثی است که در آن تعداد شکل‌های هر مرحله برابر است با مجموع اعداد طبیعی از یک تا شماره‌ی آن مرحله.

راهبرد حل تیپ (۹)

ساده‌ترین الگو، الگوی خطی است که در هر مرحله، مقدار ثابتی به شکل‌ها اضافه می‌شود. برای یافتن الگوی خطی از روی شکل‌ها، باید تشخیص دهیم در هر مرحله، چه مقداری تغییر می‌کند و چه مقداری ثابت می‌ماند. یکی از راه‌هایی که به تشخیص این موضوع کمک می‌کند این است که سعی کنیم شکل بعدی الگو را رسم کنیم. برای مثال در الگوی زیر، برای رسم شکل چهارم، باید به هر یک از چهار طرف شکل، یک مربع اضافه کنیم.



با توجه به شکل‌ها، مربع وسط ثابت است و در هر مرحله، به هر یک از چهار طرف شکل، یک مربع اضافه می‌شود، بنابراین جمله‌ی عمومی به صورت $t_n = 4n + 1$ است.

۸۱. گزینه‌ی ۳

اختلاف جملات متوالی هر الگو را می‌یابیم، اگر این مقدار ثابت باشد، الگو خطی است.

$$1, -2, 1, -2, \dots$$

الگو خطی نیست: $-3 + 3 - 3$

$$7, 11, 17, 25, \dots$$

الگو خطی نیست: $+4 + 6 + 8$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$$

الگو خطی است: $+1$

$$2, 4, 8, 16, \dots$$

الگو خطی نیست: $+2 + 4 + 8$

۸۲. گزینه‌ی ۴

جمله‌ی عمومی الگوی خطی را به صورت $t_n = an + b$ در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} t_3 = 7 \\ t_7 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 7 \\ 7a + b = 15 \end{cases} \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2, b = 1$$

در نتیجه جمله‌ی عمومی الگو به صورت $t_n = 2n + 1$ است.

۸۳. گزینه‌ی ۳

فرض کنید جمله‌ی عمومی الگو $a_n = an + b$ باشد. حاصل عبارت هر یک از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\Delta a_5 - 4a_3 = \Delta(5a + b) - 4(3a + b) = 25a + \Delta b - 12a - 4b = 13a + b = a_{13} \quad \text{گزینه‌ی (۱)}$$

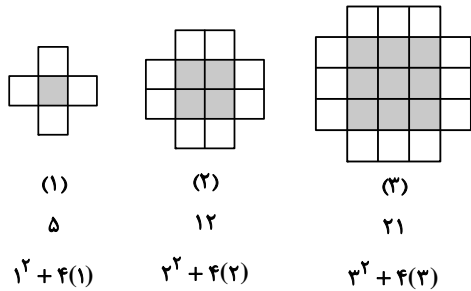
$$\frac{a_8 + a_{18}}{2} = \frac{8a + b + 18a + b}{2} = \frac{26a + 2b}{2} = 13a + b = a_{13} \quad \text{گزینه‌ی (۲)}$$

۹۳. گزینه‌ی ۱

در هر مرحله تعداد مربع‌های وسط، مربع شماره‌ی مرحله و تعداد مربع‌های گوشه‌ها، یک واحد بیش‌تر از شماره‌ی شکل است، یعنی جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $a_n = n^2 + (n+1)$ است، پس $a_9 = 9^2 + 10 = 91$.

۹۴. گزینه‌ی ۲

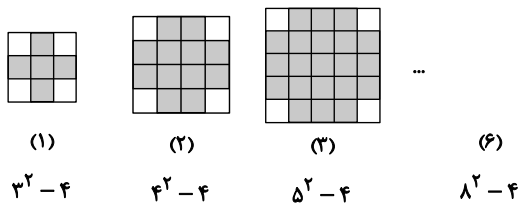
راه حل اول:



با توجه به شکل، تعداد مربع‌های وسط، مربع شماره‌ی جمله و تعداد مربع‌های کناری ۴ برابر شماره‌ی جمله است، پس در شکل ششم:

$$\text{تعداد مربع‌های کوچک شکل ششم} = 6^2 + 4(6) = 36 + 24 = 60$$

راه حل دوم: به شکل‌های زیر توجه کنید.



بنابراین در مرحله‌ی ششم، $8^2 - 4 = 60$ مربع کوچک داریم.

۹۵. گزینه‌ی ۱

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 1+2 & 1+2+3 & 1+2+3+4 & \dots & 1+2+3+\dots+n \end{array}$$

پس در هر مرحله، تعداد نقطه‌ها برابر است با مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا شماره‌ی آن مرحله، بنابراین یک الگوی مثلثی داریم که جمله‌ی عمومی آن برابر است با:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow a_8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

۹۶. گزینه‌ی ۲

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 1 & 1+2 & 1+2+3 & 1+2+3+4 & & \end{array}$$

تعداد دایره‌ها

۸۸. گزینه‌ی ۳

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1=1^2 & 4=2^2 & 9=3^2 & 16=4^2 & \dots & 49=7^2 \end{array}$$

در هر طرح، تعداد مثلث‌ها، مربع شماره‌ی طرح است. پس در طرح هفتم، ۴۹ مثلث داریم.

۸۹. گزینه‌ی ۲

اگر تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله‌ی n ام را با a_n نشان دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 = 2^2 \\ a_2 &= 4 + 12 = 16 = 4^2 \\ a_3 &= 16 + 20 = 36 = 6^2 \\ &\vdots \\ a_n &= (2n)^2 \\ a_n = 196 &\Rightarrow (2n)^2 = 14^2 \Rightarrow 2n = 14 \Rightarrow n = 7 \end{aligned}$$

۹۰. گزینه‌ی ۳

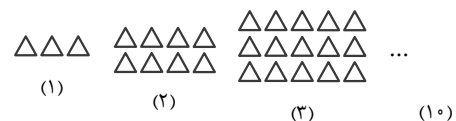
$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 8 \end{array}$$

با کمی دقت می‌بینیم که جمله‌ی عمومی الگو به صورت $a_n = 2^n$ است. پس در مرحله‌ی دوازدهم خواهیم داشت:

$$a_{12} = 2^{12} = 4096$$

۹۱. گزینه‌ی ۴

با توجه به شکل، در هر مرحله، یک ردیف اضافه می‌شود و به هر ردیف نیز یک مثلث اضافه می‌شود، بنابراین داریم:



بنابراین شکل دهم از $10 \times 12 = 120$ مثلث تشکیل شده است.

۹۲. گزینه‌ی ۲

در مرکز هر شکل، به تعداد مربع شماره‌ی مرحله، دایره‌ی سیاه وجود دارد و علاوه بر آن، در هر یک از چهار طرف شکل ۲ دایره‌ی سیاه (مجموعاً ۸ دایره‌ی سیاه) وجود دارد، بنابراین:

$$t_n = n^2 + 4(2) = n^2 + 8$$

حال باید مقدار n را بیابیم که به ازای آن $t_n = 129$ شود:

$$t_n = 129 \Rightarrow n^2 + 8 = 129 \Rightarrow n^2 = 121 \Rightarrow n = 11$$

در شکل یازدهم، تعداد دایره‌های سیاه برابر ۱۲۹ می‌شود.

راهبرد حل تپ (۱۱)

در دنباله‌ها با دو نوع سؤال مواجه‌ایم:

(۱) چند جمله‌ی اول دنباله داده شده باشد: در این حالت معمولاً می‌توان یک جمله‌ی عمومی برای آن نوشت. برای این منظور باید رابطه‌ی بین جملات را بیابیم.

باید توجه داشت که همواره نمی‌توان برای همه‌ی دنباله‌های اعداد، جمله‌ی عمومی نوشت؛ مثلاً دنباله‌ی اعداد اول. از طرفی برای یک دنباله، ممکن است بتوانیم چند جمله‌ی عمومی متفاوت بنویسیم. مثلاً:

۱, ۲, ۴, ۸, ...

$$t_n = 2^{n-1} \quad \text{یا} \quad t_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 2^{n-1}$$

(۲) جمله‌ی عمومی دنباله داده شده باشد و ارتباط بین جملات خواسته شود: در این حالت، با جایگزین کردن مقادیر مناسب n در جمله‌ی عمومی، می‌توان رابطه‌ی خواسته شده را به دست آورد.

۱.۰۱ گزینگی ۲

$$a_n = 128 \Rightarrow 2(-2)^{n+1} = 128$$

$$\Rightarrow (-2)^{n+1} = 64 = (-2)^6 \Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$$

پس جمله‌ی پنجم برابر ۱۲۸ است.

۱.۰۲ گزینگی ۲

باید نامعادله‌ی $3n - 13 < 0$ را برای $n \in \mathbb{N}$ حل کنیم.

$$3n - 13 < 0 \Rightarrow n < \frac{13}{3} \approx 4.33 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{1, 2, 3, 4\}$$

پس این دنباله، ۴ جمله‌ی منفی دارد.

۱.۰۳ گزینگی ۲

جمله‌های ردیف زوج در این دنباله مثبت‌اند، چند جمله‌ی ابتدایی با شماره‌ی فرد را به دست می‌آوریم:

$$a_n = \frac{n}{81} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{81} - \frac{1}{3} = -\frac{26}{81} < 0 \\ a_3 = \frac{3}{81} - \frac{1}{27} = 0 \\ a_5 = \frac{5}{81} - \frac{1}{243} = \frac{14}{243} > 0 \\ \vdots \end{cases}$$

دیده می‌شود که جملات با ردیف فرد از جمله‌ی پنجم به بعد مثبت‌اند، بنابراین در این دنباله، فقط جمله‌ی اول منفی است.

۱.۰۴ گزینگی ۳

$$a_n = bn^2 + cn \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b + c \\ a_7 = 4b + 2c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = b + c \\ 8 = 4b + 2c \end{cases} \Rightarrow b = 1, c = 2$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 + 2n \xrightarrow{n=10} a_{10} = (10)^2 + 2(10) = 120$$

تعداد دایره‌ها در شکل، الگوی مثلثی را تشکیل می‌دهند، لذا:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = \frac{11 \times 12}{2} = 66 \\ a_{12} = \frac{12 \times 13}{2} = 78 \end{cases} \Rightarrow 66 + 78 = 144$$

۹۷ گزینگی ۴

با توجه به شکل:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{نقطه} & 3 & 3+6 & 3+6+9 & 3+6+\dots+18 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 3 \times 1 & 3 \times (1+2) & 3 \times (1+2+3) & & 3 \times (1+2+\dots+6) \end{array}$$

بنابراین:

$$a_6 = 3(1+2+3+4+5+6) = 3\left(\frac{6 \times 7}{2}\right) = 3 \times 21 = 63$$

۹۸ گزینگی ۱

تعداد دایره‌های سیاه و سفید را در هر شکل مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{تعداد دایره‌های سیاه} & 1 & 1 & 6 & 6 & 15 & 15 \\ \text{تعداد دایره‌های سفید} & 0 & 3 & 3 & 10 & 10 & 21 \end{array}$$

تعداد دایره‌های سیاه و سفید، یک در میان، جملات متوالی الگوی مثلثی هستند که تعداد دایره‌های سیاه برابر است با جملات فرد الگوی مثلثی و تعداد دایره‌های سفید برابر است با جملات زوج الگوی مثلثی، پس در شکل دهم تعداد دایره‌های سفید برابر است با جمله‌ی دهم الگوی مثلثی.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

۹۹ گزینگی ۴

تعداد صفرهای توپر و توخالی را در هر شکل مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{تعداد صفرهای توپر} & 1 & 1 & 6 & 6 & 15 & 15 \\ \text{تعداد صفرهای توخالی} & 0 & 3 & 3 & 10 & 10 & 21 \end{array}$$

تعداد صفرهای توپر و توخالی یک در میان، جملات متوالی الگوی مثلثی هستند؛ که تعداد صفرهای توپر برابر است با جملات فرد الگو و تعداد صفرهای توخالی برابر است با جملات زوج الگو. پس جمله‌ی دوازدهم الگوی مثلثی تعداد صفرهای توخالی شکل دوازدهم را نشان می‌دهد.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_{12} = \frac{12 \times 13}{2} = 78$$

۱۰۰ گزینگی ۴

با توجه به حل سؤال قبل، تعداد دایره‌های توپر در شکل دهم برابر با جمله‌ی نهم الگوی مثلثی و تعداد دایره‌های توپر در شکل یازدهم برابر با جمله‌ی یازدهم الگوی مثلثی است.

$$a_{11} - a_9 = \frac{11 \times 12}{2} - \frac{9 \times 10}{2} = 66 - 45 = 21$$

$$a_n = 2^n - n^2$$

گزینه‌ی (۴):

$$\begin{cases} a_1 = 2^1 - 1^2 = 1 \\ a_2 = 2^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow \text{دنباله: } 1, 0, -1, \dots \checkmark \\ a_3 = 2^3 - 3^2 = -1 \end{cases}$$

گزینه‌ی ۲. ۱۰۹

در دنباله‌ی داده شده، صورت کسر هر جمله، برابر با شماره‌ی جمله و مخرج آن برابر با مربع شماره‌ی جمله به علاوه‌ی یک است، بنابراین:

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\Rightarrow a_7 = \frac{7}{7^2 + 1} = \frac{7}{50} = 0.14$$

گزینه‌ی ۱. ۱۱۰

اختلاف جملات متوالی دنباله، خود یک دنباله‌ی خطی تشکیل می‌دهند:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & 5 & , & 12 & , & 22 & , & 35 & , & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\ & +4 & & +7 & & +10 & & & & & \\ & +3 & & +3 & & +3 & & & & & \end{array}$$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی درجه‌ی دو را به صورت

$$a_n = an^2 + bn + c$$

در دنباله‌ی متوالی دنباله‌ی خطی برابر با ۳ است، پس $2a = 3$ در

$$a = \frac{3}{2}$$

برای یافتن b و c ، دو جمله‌ی اول دنباله را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}(1)^2 + b(1) + c = 1 \Rightarrow b + c = \frac{-1}{2} & (1) \\ a_2 = 5 \Rightarrow \frac{3}{2}(2)^2 + b(2) + c = 5 \Rightarrow 2b + c = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} b = \frac{-1}{2} \xrightarrow{(1)} c = 0$$

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله به صورت $a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ است.

$$a_{30} = \frac{3}{2}(30)^2 - \frac{1}{2}(30) = \frac{1}{2}(30)(3 \times 30 - 1)$$

$$= 15(90 - 1) = 1335$$

گزینه‌ی ۳. ۱۱۱

دنباله‌ی داده شده، دنباله‌ی مثلثی است و جمله‌ی n ام (عمومی)

$$\text{دنباله‌ی مثلثی } a_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ است.}$$

$$a_7 = \frac{7(7+1)}{2} = \frac{7 \times 8}{2} = 28$$

$$\Rightarrow 28 + 36 = 64$$

$$a_8 = \frac{8(8+1)}{2} = \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

گزینه‌ی ۲. ۱۰۵

جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{1}{2} & , & \frac{-2}{3} & , & \frac{3}{4} & , & \frac{-4}{5} & , & \frac{5}{6} & , & \frac{-6}{7} \end{array}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6$$

بنابراین:

$$= \frac{1}{2} \times \frac{-2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{-4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{-6}{7} = \frac{-1}{7}$$

گزینه‌ی ۲. ۱۰۶

۲۰۰ جمله‌ی اول این دنباله، ۱۰۰ جفت دوتایی به ترتیب زیر پدید می‌آورند. پس مجموع ۲۰۰ جمله‌ی اول این دنباله برابر ۱۰۰- است.

$$\underbrace{1, -2}_{-1}, \underbrace{3, -4}_{-1}, \underbrace{5, -6}_{-1}, \dots, \underbrace{199, -200}_{-1}$$

گزینه‌ی ۴. ۱۰۷

صورت و مخرج کسرها به ترتیب اعداد طبیعی فرد و زوج متوالی هستند، اعداد طبیعی فرد و زوج متوالی را به ترتیب با $2n-1$ و $2n$ نمایش می‌دهیم که در آن $n \in \mathbb{N}$ ، پس جمله‌ی عمومی آن

$$\text{به صورت } a_n = \frac{2n-1}{2n} \text{ می‌تواند باشد.}$$

گزینه‌ی ۳. ۱۰۸

با توجه به جمله‌ی عمومی داده شده در هر گزینه، سه جمله‌ی اول مربوط به دنباله را می‌نویسیم و با سه جمله‌ی اول داده شده مقایسه می‌کنیم.

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

گزینه‌ی (۱):

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2 \times 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \\ a_2 = \frac{2 \times 2}{2+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{دنباله: } 1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \dots \checkmark \\ a_3 = \frac{2 \times 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{-1}{2} + n$$

گزینه‌ی (۲):

$$\begin{cases} a_1 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{-1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{دنباله: } \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \checkmark \\ a_3 = \frac{-1}{2} + 3 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$a_n = (-3)^n$$

گزینه‌ی (۳):

$$\begin{cases} a_1 = (-3)^1 = -3 \\ a_2 = (-3)^2 = 9 \Rightarrow \text{دنباله: } -3, 9, -27, \dots \times \\ a_3 = (-3)^3 = -27 \end{cases}$$

جملات این دنباله با دنباله‌ی داده شده یکسان نیست.