

(فصل ۱)

معادله درجه دوم

۱۱	معادله و مسائل توصیفی
۱۳	حل معادله درجه ۲ و کاربردها
۲۶	معادله شامل عبارت‌های گویا
۳۱	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل صفر)

یادآوری اتحاد و تجزیه

۷	یادآوری اتحاد و تجزیه
---	-----------------------

(فصل ۲)

کار با داده‌های آماری

۹۴	تعاریف اولیه در آمار
۱۰۲	معیارهای گرایش به مرکز
۱۱۲	معیارهای پراکندگی
۱۲۲	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۲)

تابع

۴۸	مفهوم تابع
۵۲	ضابطه جبری تابع
۵۸	نمودار توابع خطی
۶۳	نمودار تابع درجه دو
۷۶	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۴)

نمایش داده‌ها

۱۳۷	نمودارهای یک‌متغیره
۱۴۵	نمودارهای چندمتغیره
۱۵۵	پاسخ‌نامه تشریحی
۱۶۴	پاسخ‌نامه کلیدی

درس ۲

نمودار توابع خطی



یادآوری معادله خط

در این قسمت با توابع خطی سروکار داریم. از آن جایی که توابع خطی همان معادله خط خودمان هستند، پس قبل از شروع مطالب این بخش، یک یادآوری سریع بر معادله خط انجام می‌دهیم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

شیب خط: شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ که معمولاً آن را با m نشان می‌دهیم، برابر است با:

تست شیب خط گذرنده از نقاط $A(5, 1)$ و $B(-1, 4)$ کدام است؟

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{-1 - 5} = \frac{3}{-6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه ۱

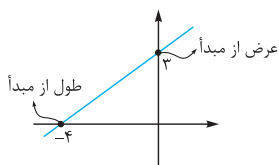
مفهوم معادله خط: منظور از نوشتن معادله خط، نوشتن رابطه‌ای است که مؤلفه‌های x و y هر نقطه از خط در آن صدق کنند.

حالت کلی معادله یک خط به صورت $y = mx + h$ است که در آن m شیب خط و h عرض از مبدأ خط است.

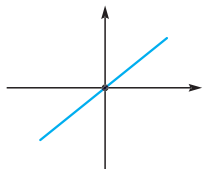
عرض از مبدأ: عرض نقطه برخورد خط با محور عرض‌ها است. چون این نقطه روی محور y ‌ها است، پس طول (x) آن صفر است. یعنی برای به دست آوردن عرض از مبدأ، می‌توانیم در معادله خط به جای x عدد صفر را قرار دهیم، y به دست آمده همان عرض از مبدأ است، پس اگر عرض از مبدأ یک خط h باشد، آن خط از نقطه $(0, h)$ می‌گذرد.

طول از مبدأ: طول نقطه برخورد خط با محور طول‌ها است. چون این نقطه روی محور x ‌ها است، پس عرض (y) آن صفر است؛ یعنی برای به دست آوردن طول از مبدأ، می‌توانیم در معادله خط به جای y عدد صفر را قرار دهیم، x به دست آمده همان طول از مبدأ است، پس اگر طول از مبدأ یک خط e باشد، آن خط از نقطه $(e, 0)$ می‌گذرد.

مثلاً در خط روبه‌رو، عرض از مبدأ ۳ و طول از مبدأ -۴ است.



اگر عرض از مبدأ خطی صفر باشد، طول از مبدأ آن هم حتماً صفر است و این خط حتماً از مبدأ مختصات عبور می‌کند.



تست اگر عرض از مبدأ خطی -۲ و طول از مبدأ آن ۳ باشد، شیب خط کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ گزینه ۲ چون عرض از مبدأ خط -۲ است، پس از نقطه $A(0, -2)$ می‌گذرد و چون طول از مبدأ خط ۳ است، پس از نقطه $B(3, 0)$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-2)}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

می‌گذرد. حالا با داشتن دو نقطه از خط، شیب خط را به دست می‌آوریم:



برای نوشتن معادله خط، به شیب خط و یک نقطه از خط نیاز داریم. ما باید با ترفندهایی که بلد هستیم و یاد خواهیم گرفت این دو را به دست آوریم، تا معادله خط را بنویسیم. در این قسمت دو حالت ابتدایی نوشتن معادله خط را بررسی می‌کنیم، یکی نوشتن معادله خط با داشتن شیب و یک نقطه از خط و دیگری نوشتن معادله خط با داشتن دو نقطه از خط.

نوشتن معادله خط با داشتن شیب و یک نقطه از خط

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_0, y_0) می‌گذرد به شکل روبه‌رو است:

تست معادله خطی که شیب آن ۳ و از نقطه $(-1, 2)$ عبور کند، کدام است؟

$$y = -3x + 5 \quad (1) \quad y = 3x - 5 \quad (2) \quad y = 3x + 5 \quad (3) \quad y = -3x - 5 \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۳ اول شکل کلی معادله خطی به شیب m و گذرنده از نقطه (x_0, y_0) را می‌نویسیم:

نقطه $(-1, 2)$ معادل با نقطه (x_0, y_0) است، یعنی $x_0 = -1$ و $y_0 = 2$ است و شیب خط هم که ۳ است، یعنی $m = 3$. این اطلاعات را در معادله خط جای گذاری می‌کنیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{x_0 = -1, y_0 = 2, m = 3} y - 2 = 3(x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = 3(x + 1) \Rightarrow y - 2 = 3x + 3 \Rightarrow y = 3x + 3 + 2 \Rightarrow y = 3x + 5$$

نوشتن معادله خط با داشتن دو نقطه از خط

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

در این حالت ابتدا با کمک دو نقطه داده شده A و B ، شیب خط را به دست می‌آوریم:

حالا که شیب خط را داریم با یکی از دو نقطه A و B (هر کدام که دوست دارید) معادله خط را مثل حالت قبل می‌نویسیم.

تست معادله خط گذرنده از نقاط $A(-3, 2)$ و $B(0, -4)$ کدام است؟

$$y = 2x - 4 \quad (1) \quad y = 2x + 4 \quad (2) \quad y = -2x + 4 \quad (3) \quad y = -2x - 4 \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۳ اول باید شیب خط گذرنده از $A(-3, 2)$ و $B(0, -4)$ را به دست آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - 2}{0 - (-3)} = \frac{-6}{3} = -2$$

حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط، مثلاً $B(0, -4)$ (اگر A را هم بگیرید، جواب عوض نمی‌شه) معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{x_0 = 0, y_0 = -4, m = -2} y - (-4) = -2(x - 0) \Rightarrow y + 4 = -2x \Rightarrow y = -2x - 4$$

تست معادله خطی که عرض از مبدأ آن -1 و طول از مبدأ آن 4 باشد، کدام است؟

$$y = 4x - 1 \quad (1) \quad y = \frac{1}{4}x - 1 \quad (2) \quad y = 4x + 1 \quad (3) \quad y = \frac{1}{4}x + 1 \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۲ عرض از مبدأ آن -1 است، یعنی از نقطه $(0, -1)$ می‌گذرد. طول از مبدأ آن 4 است، یعنی از نقطه $(4, 0)$ می‌گذرد. حالا با

داشتن دو نقطه $A(0, -1)$ و $B(4, 0)$ از خط، شیب آن را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-1)}{4 - 0} = \frac{1}{4}$$

حالا با داشتن شیب خط و یک نقطه از خط، مثلاً $A(0, -1)$ معادله خط را می‌نویسیم:

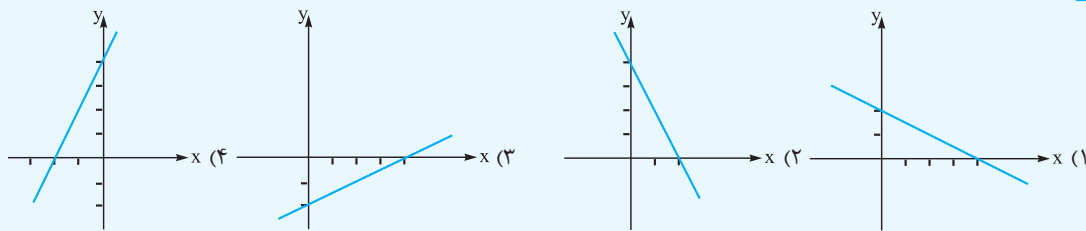
$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{x_0 = 0, y_0 = -1, m = \frac{1}{4}} y - (-1) = \frac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{4}x \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - 1$$

رسم خط

رسم خط با داشتن معادله خط: برای رسم یک خط (با داشتن معادله آن) روی دستگاه مختصات، کافی است مختصات دو نقطه از خط را به دست آوریم. برای این کار دو بار به x عدد می‌دهیم و y متناظر با آن x را به دست می‌آوریم. انتخاب این دو عدد به خودتان بستگی دارد ولی هر عددی هم خوب نیست! مثلاً کسی برای رسم خط $y = 2x - 1$ به x عدد $\frac{5}{4}$ یا $\sqrt{3}$ را نمی‌دهد!

البته پیشنهاد می‌کنیم برای رسم دقیق‌تر، اول x را صفر بدهید و y متناظر با آن را به دست آورید. با این کار محل تقاطع خط با محور y ها به دست می‌آید. بعد هم y را صفر بدهید و x متناظر با آن را به دست آورید. این بار محل تقاطع خط با محور x ها به دست می‌آید.

تست نمودار خط $2y + x = 4$ کدام است؟



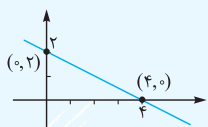
پاسخ گزینه ۱ لازم نیست خط را به شکل استاندارد بنویسیم، همین جوری هم به x و y عدد بدهیم مشکلی نیست. اول به x صفر می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم:

$$2y + x = 4 \xrightarrow{x=0} 2y + 0 = 4 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

$$2y + x = 4 \xrightarrow{y=0} 2(0) + x = 4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0)$$

بعد هم به y صفر می‌دهیم و x را به دست می‌آوریم:

حالا با داشتن دو نقطه خوب از خط (محل تقاطع خط با دو محور)، آن را رسم می‌کنیم:



تابع خطی

هر «تابع خطی» دقیقاً یک «معادله خط» است. برای ما $y = 2x + 3$ با $f(x) = 2x + 3$ هیچ فرقی با هم ندارند. هر جا حرف از معادله خط شد از $y = mx + h$ و هر جا حرف از تابع خطی شد از $f(x) = mx + h$ استفاده می‌کنیم.

تست ضابطه تابعی خطی که از دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(1, 5)$ عبور کند، کدام است؟

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (4)$$

$$f(x) = -2x + 7 \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad (2)$$

$$f(x) = -2x - 7 \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۳ ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه A و B را می‌نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{1 - 2} = \frac{2}{-1} = -2$$

اول شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

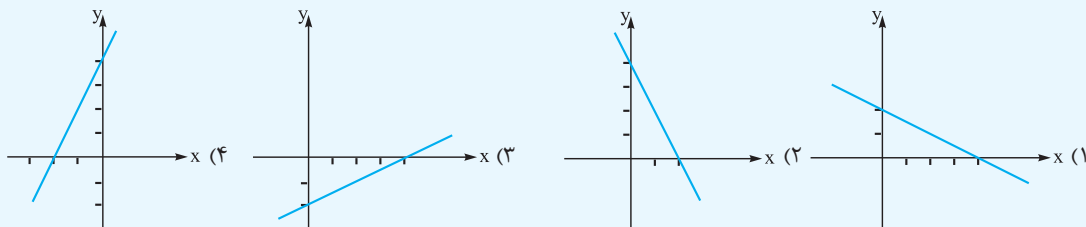
حالا با داشتن شیب $m = -2$ و انتخاب یکی از دو نقطه اولیه (مثلاً A)، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{m=-2 \\ (2, 3) \\ x_0, y_0}} y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 7$$

حالا که معادله خط را به شکل استاندارد نوشتیم، کافی است جای y ، عبارت $f(x)$ را قرار دهیم تا ضابطه تابع موردنظر به دست آید:

$$f(x) = -2x + 7$$

تست نمودار تابع خطی $f(x) = 2x + 4$ کدام است؟



پاسخ گزینه ۳ کافی است معادله خط $y = 2x + 4$ را رسم کنیم.

به x دو عدد متفاوت می‌دهیم تا y نقاط به دست آید، سپس با داشتن دو نقطه از خط، آن را رسم می‌کنیم.

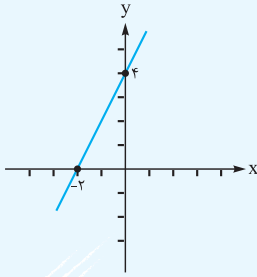
$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 4 = 0 + 4 = 4 \xrightarrow{\text{نقطه}} (0, 4)$$

به x عدد صفر می‌دهیم:

$$x = -2 \Rightarrow y = 2(-2) + 4 = -4 + 4 = 0 \xrightarrow{\text{نقطه}} (-2, 0)$$

به x عدد -2 را می‌دهیم:

حالا با داشتن دو نقطه از خط آن را رسم می‌کنیم:



اگر $f(a) = b$ باشد، تابع f از نقطه (a, b) عبور می‌کند.

تست اگر f تابعی خطی، $f(-1) = 3$ و $f(2) = -9$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

$f(x) = -4x - 7$ (۴)

$f(x) = -4x - 1$ (۳)

$f(x) = 4x - 1$ (۲)

$f(x) = 4x + 7$ (۱)

پاسخ گزینه ۴ **روش اول** چون $f(-1) = 3$ است، پس تابع از نقطه $A(-1, 3)$ می‌گذرد. چون $f(2) = -9$ است، پس تابع از نقطه $B(2, -9)$ می‌گذرد.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-9 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-12}{3} = -4$$

می‌گذرد. چون تابع خطی است، پس باید یک معادله خط به دست آوریم:

حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً A) معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[\substack{\downarrow \\ x_0, y_0}]{\substack{m=-4 \\ (-1, 3)}} y - 3 = -4(x - (-1)) \Rightarrow y - 3 = -4(x + 1) \Rightarrow y - 3 = -4x - 4 \Rightarrow y = -4x - 1$$

$f(x) = -4x - 1$

حالا کافی است جای y ، عبارت $f(x)$ را قرار دهیم تا ضابطه تابع به دست آید:

روش دوم چون فرم کلی تابع خطی به صورت $f(x) = mx + h$ است، پس با جای‌گذاری اطلاعات داده‌شده، m و h را محاسبه می‌کنیم:

$f(-1) = m(-1) + h = -m + h$

$f(-1) = 3$ است، برای محاسبه $f(-1)$ ، جای x ها عدد -1 را قرار می‌دهیم:

$-m + h = 3$

پس $-m + h$ باید برابر با 3 باشد:

$f(2) = m(2) + h = 2m + h$

$f(2) = -9$ است، برای محاسبه $f(2)$ ، جای x ها عدد 2 را قرار می‌دهیم:

$2m + h = -9$

پس $2m + h$ باید برابر با -9 باشد:

حالا دو معادله به دست آمده را در یک دستگاه «دو معادله - دو مجهول» حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} -m + h = 3 & \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} m - h = -3 \\ 2m + h = -9 \end{cases} \oplus \\ 2m + h = -9 & \xrightarrow{\text{خودش}} \end{cases} \Rightarrow 3m = -12 \Rightarrow m = \frac{-12}{3} = -4$$

حالا $m = -4$ را در معادله $-m + h = 3$ جای‌گذاری می‌کنیم تا h به دست آید:

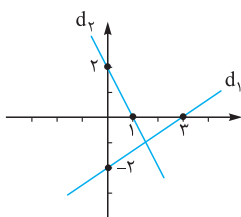
$-m + h = 3 \xrightarrow{m=-4} -(-4) + h = 3 \Rightarrow 4 + h = 3 \Rightarrow h = 3 - 4 \Rightarrow h = -1$

حالا که $m = -4$ و $h = -1$ به دست آمدند، آن‌ها را در فرم کلی تابع خطی یعنی $f(x) = mx + h$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$f(x) = mx + h \xrightarrow[h=-1]{m=-4} f(x) = -4x - 1$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۷- با توجه به دستگاه مختصات مقابل، مجموع شیب دو خط d_1 و d_2 چه قدر است؟



$\frac{4}{3}$ (۱)

$-\frac{4}{3}$ (۲)

۱ (۳)

-1 (۴)

۵۸- عرض از مبدأ خط گذرا بر دو نقطه $(3, -2)$ و $(1, 2)$ کدام است؟

۴ (۱)

$\frac{4}{5}$ (۲)

۵ (۳)

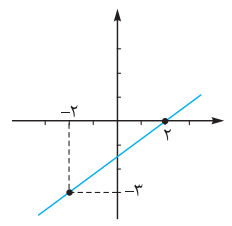
$\frac{5}{5}$ (۴)

(تارج ۹۵)

۵۹- خطی که از دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ می‌گذرد، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- $4\frac{2}{3}$ (۴) $4\frac{1}{3}$ (۳) $3\frac{2}{3}$ (۲) $3\frac{1}{3}$ (۱)

(سراسری ۸۸)



۶۰- معادله خط مقابل کدام است؟

- $3x + 4y = 6$ (۱)
 $3x - 4y = 6$ (۲)
 $4x + 3y = 8$ (۳)
 $4x - 3y = 8$ (۴)

۶۱- تابع خطی f از نقاط $(1, 1)$ و $(3, 2)$ عبور می‌کند. نمودار این تابع از کدام ناحیه مختصاتی نمی‌گذرد؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

(کتاب درسی)

۶۲- اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(1) = -3$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

- $f(x) = -3x$ (۱) $f(x) = 3x$ (۲) $f(x) = \frac{-x}{3}$ (۳) $f(x) = \frac{x}{3}$ (۴)

۶۳- نمودار یک تابع خطی از نقطه $(-1, 2)$ می‌گذرد و شیب آن $-\frac{3}{4}$ است. مقدار این تابع در $x = -5$ چه قدر است؟

- -5 (۱) 6 (۲) -7 (۳) 8 (۴)

(کتاب درسی)

۶۴- در تابع خطی f داریم $f(2) = -3$ و $f(-2) = -5$. مقدار $f(3)$ چه قدر است؟

- $\frac{5}{2}$ (۱) $\frac{-5}{2}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{-9}{4}$ (۴)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۶۵- در تابع خطی f ، اگر $f(2) = f(1) + 1$ و $f(3) = 4$ باشند، آن‌گاه $f(-1) + f(2)$ کدام است؟

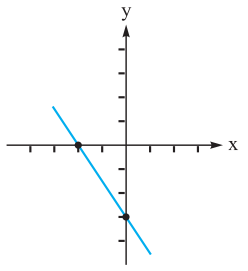
- 1 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 5 (۴)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۶۶- اگر تابع خطی f ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{3}{4}$ قطع کند و $f(2) = 3$ باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- $f(-1) = 3$ (۱) $f(1) = 3$ (۲) $f(1) = -3$ (۳) $f(-1) = -3$ (۴)

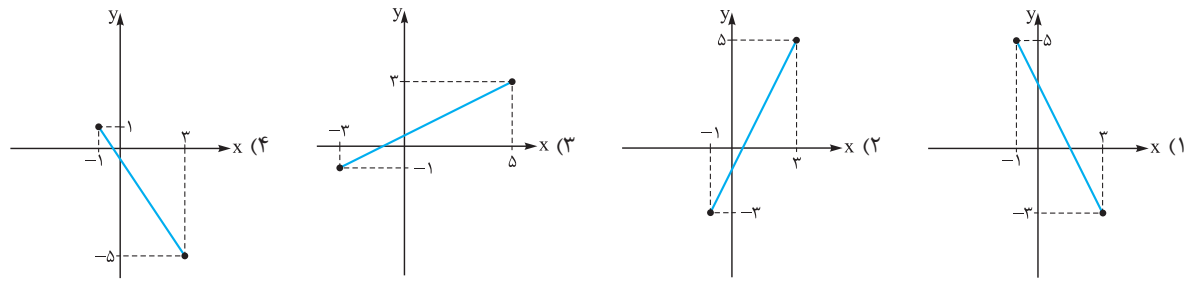
۶۷- ضابطه تابع خطی f که نمودار آن در روبه‌رو رسم شده است، کدام است؟



- $f(x) = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{4}$ (۱)
 $f(x) = -3x - \frac{3}{4}$ (۲)
 $f(x) = -\frac{3x}{4} - 3$ (۳)
 $f(x) = -3x + 3$ (۴)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۶۸- نمودار تابع خطی $f(x) = 2x - 1$ با دامنه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$ شبیه کدام گزینه است؟



(کتاب درسی)

۶۹- ضابطه تابع محیط مستطیلی‌هایی که طول آن‌ها ۳ واحد بیشتر از عرض آن‌ها می‌باشد برحسب عرض (x) آن کدام است؟

- $f(x) = 4x + 6$ (۴) $f(x) = 2x + 3$ (۳) $f(x) = 4x - 6$ (۲) $f(x) = 2x - 3$ (۱)

(کتاب درسی)

۷۰- نمودار تابع خطی f از نقطه $A(6, -3)$ می‌گذرد و $f(-9) = -23$ است. اختلاف $f(\frac{3}{4})$ و $f(\frac{-3}{4})$ چه قدر است؟

- 1 (۴) 2 (۳) 3 (۲) 4 (۱)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۷۱- اگر زوج مرتب‌های $\{(2, -1), (3, 5), (-1, -19)\}$ ، نقاط روی یک تابع خطی باشند، اختلاف $f(0/2)$ و $f(-0/2)$ کدام است؟

- $2/4$ (۱) $0/6$ (۲) $1/2$ (۳) $0/8$ (۴)

۷۲- دماسنجی با رابطه خطی، دمای 3°C را 70 و دمای 5°C را 120 نشان می‌دهد. این دماسنج دمای $^\circ\text{C}$ را چه عددی نشان می‌دهد؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

- -10 (۱) 5 (۲) -5 (۳) 10 (۴)

۷۳- یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 6000 + 40x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را ۹۰ تومان می‌فروشد. این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

- ۱۱۹ (۱) ۱۲۱ (۲) ۱۲۹ (۳) ۱۳۱ (۴)

۷۴- رابطه بین درجه دما بر حسب سانتی‌گراد (C) و فارنهایت (F) به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ می‌باشد. دمای یک جسم ۱۵ درجه سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن بر حسب فارنهایت چه قدر افزایش یافته است؟

- ۱۵ (۱) ۴۷ (۲) ۲۷ (۳) ۵۹ (۴)

۷۵- فرض کنید جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر با ۸۵۰۰۰۰ نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر با ۱۰۳۰۰۰۰ نفر بوده است. اگر الگوی خطی را برای رشد جمعیت این شهر در نظر بگیریم، در سال ۱۴۲۰ جمعیت این شهر کدام است؟

- ۱۳۱۰۰۰۰ (۱) ۱۴۸۰۰۰۰ (۲) ۱۵۴۰۰۰۰ (۳) ۱۳۰۰۰۰۰ (۴)

۷۶- اگر دامنه تابعی خطی $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ و برد آن $R = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leq y \leq 5\}$ باشد، در این صورت ضابطه آن کدام می‌تواند باشد؟

- $f(x) = -3x - 1$ (۱) $f(x) = 3x + 4$ (۲)
 $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ (۳) $f(x) = -3x + 4$ (۴)



شیب خط d_1 برابر است با شیب خط گذرنده از A و B و شیب خط d_2 نیز برابر است با شیب خط گذرنده از C و D :

$$\left. \begin{aligned} m_{d_1} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \\ m_{d_2} &= \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{d_1} + m_{d_2} = \frac{2}{3} + (-2)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{-6}{3} = \frac{-4}{3}$$

۵۸- گزینه \bullet اول شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(3, -2)$ و $B(1, 2)$

را حساب می‌کنیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-2)}{1 - 3} = \frac{4}{-2} = -2$$

حالا با داشتن شیب و انتخاب یکی از دو نقطه A و B (مثلاً B) معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{m=-2 \\ B(1, 2) \\ \downarrow \\ x_0, y_0}} y - 2 = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow y - 2 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 4$$

عرض از مبدأ

۵۹- گزینه \bullet سؤال گفته این خط محور y ها را با کدام عرض قطع

می‌کند؟ در واقع سؤال از ما عرض از مبدأ را می‌خواهد. باید معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ را به دست آوریم و از روی آن عرض از مبدأ را تعیین کنیم؛ اول باید شیب خط گذرنده از A و B را به دست آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 5}{-4 - 2} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

حالا با داشتن شیب $(m = \frac{2}{3})$ و یک نقطه از خط (مثلاً $A(2, 5)$) معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{x_0=2, y_0=5 \\ m=\frac{2}{3}}} y - 5 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - 5 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 5$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{-4 + 15}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

عرض از مبدأ
شیب

کافی است $\frac{11}{3}$ را به عدد مخلوط تبدیل کنیم: $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$

$$\frac{11}{3} \left| \begin{array}{l} 3 \\ -9 \end{array} \right. \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

۶۰- گزینه \bullet از روی شکل مختصات

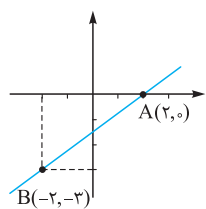
نقطه از خط را به دست می‌آوریم:
حالا با داشتن این دو نقطه، شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 0}{-2 - 2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

حالا با داشتن شیب $(m = \frac{3}{4})$ و یک نقطه از خط (مثلاً $A(2, 0)$)، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{x_0=2, y_0=0 \\ m=\frac{3}{4}}} y - 0 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{6}{4} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۴}} 4y = 3x - 6 \Rightarrow 3x - 4y = 6$$

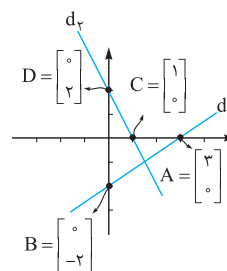


۵۷- گزینه \bullet باید دو نقطه روی هر

کدام از خطها پیدا کنیم که مختصاتشان معلوم باشد. بهترین نقاط هر دو خط محل برخوردشان با محورهای مختصات است.

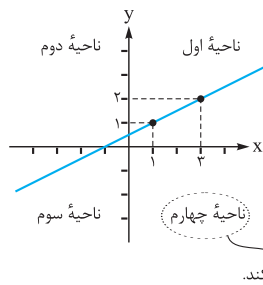
دو نقطه $A = (3, 0)$ و $B = (0, -2)$ را از خط d_1 و دو نقطه $C = (1, 0)$ و $D = (0, 2)$ را از خط d_2 انتخاب می‌کنیم.

حالا که از هر خط دو نقطه داریم، شیب هر دو خط را به دست می‌آوریم؛



۶۱- گزینه: نمودار خطی را که از نقاط $(1, 1)$ و $(3, 2)$ می‌گذرد

رسم می‌کنیم:



۶۲- گزینه: روش اول نمودار f از مبدأ عبور کرده است، پس

نقطه $A(0, 0)$ روی آن است. از طرفی چون $f(1) = -3$ است، پس نقطه $B(1, -3)$ روی آن است. با داشتن دو نقطه از خط، معادله آن را می‌نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 0}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3$$

اول شیب خط: حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً A)، معادله آن را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{m = -3 \\ (0, 0) \\ \downarrow \downarrow \\ x_0, y_0}} y - 0 = -3(x - 0) \Rightarrow y = -3x$$

حالا کافی است جای y ، عبارت $f(x)$ را قرار دهیم:

روش دوم با جای گذاری $f(1) = -3$ در گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای است که درست می‌باشد.

۶۳- گزینه: باید معادله خطی را بنویسیم که از نقطه $(-1, 2)$

می‌گذرد و شیب آن $m = \frac{-3}{2}$ است:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{m = \frac{-3}{2} \\ (-1, 2) \\ \downarrow \downarrow \\ x_0, y_0}} y - 2 = \frac{-3}{2}(x - (-1))$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{-3}{2}(x + 1) \Rightarrow y - 2 = \frac{-3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-3}{2}x - \frac{3}{2} + 2 \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}$$

حالا جای y ، عبارت $f(x)$ را قرار می‌دهیم تا ضابطه f به دست آید:

$$f(x) = \frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}$$

سؤال مقدار تابع f را در $x = -5$ می‌خواهد، پس جای x عدد -5 را قرار

$$f(-5) = \frac{-3}{2}(-5) + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

می‌دهیم:

۶۴- گزینه: چون $f(2) = -3$ ، پس نقطه $A(2, -3)$ روی f

است. چون $f(-2) = -5$ ، پس نقطه $B(-2, -5)$ روی f است. حالا با داشتن دو نقطه، شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5 - (-3)}{-2 - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

حالا با شیب و یک نقطه، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{m = \frac{1}{2} \\ (2, -3) \\ \downarrow \downarrow \\ x_0, y_0}} y - (-3) = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y + 3 = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 4$$

حالا جای y ، عبارت $f(x)$ را قرار می‌دهیم تا ضابطه تابع به دست آید:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 4$$

سؤال $f(3)$ را می‌خواهد، پس در ضابطه f ، جای x ها عدد 3 را قرار

$$f(3) = \frac{1}{2}(3) - 4 = \frac{3}{2} - 4 = \frac{-5}{2}$$

می‌دهیم:

۶۵- گزینه: ضابطه f را به صورت $f(x) = mx + h$ در نظر

می‌گیریم. از رابطه $f(2) = f(1) + 1$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= f(1) + 1 \\ 2m + h &= m + h + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = 1$$

پس ضابطه تابع تا این‌جا به شکل $f(x) = x + h$ درآمده است. حالا از

$$f(3) = 4 \Rightarrow 3 + h = 4 \Rightarrow h = 1$$

پس ضابطه تابع به شکل $f(x) = x + 1$ است.

مقدار $f(-1)$ و $f(2)$ را حساب می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= -1 + 1 = 0 \\ f(2) &= 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1) + f(2) = 0 + 3 = 3$$

۶۶- گزینه: تابع خطی f محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{3}{2}$ قطع

می‌کند، یعنی از نقطه $A(\frac{3}{2}, 0)$ می‌گذرد. از $f(2) = 3$ نتیجه می‌گیریم

نقطه $B(2, 3)$ روی تابع است. اول شیب خط گذرنده از نقاط A و B را

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

حساب می‌کنیم:

و بعدش معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 6(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - 3 = 6x - 12 \Rightarrow y = 6x - 9$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 6x - 9$ است.

با توجه به گزینه‌ها، مقدار $f(1)$ و $f(-1)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(1) = 6(1) - 9 = 6 - 9 = -3 \Rightarrow \text{صحیح است.}$$

$$f(-1) = 6(-1) - 9 = -6 - 9 = -15$$

۶۷- گزینه: مختصات دو

نقطه برخورد خط با محورهای

مختصات را می‌نویسیم:

حالا با داشتن دو نقطه از خط،

شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 0}{0 - (-2)} = \frac{-3}{2}$$

با شیب و یک نقطه، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{m = \frac{-3}{2} \\ (0, -3) \\ \downarrow \downarrow \\ x_0, y_0}} y - (-3) = \frac{-3}{2}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y + 3 = \frac{-3}{2}x \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x - 3$$

حالا جای y ، عبارت $f(x)$ را قرار می‌دهیم تا ضابطه تابع f به دست آید:

$$f(x) = \frac{-3}{2}x - 3$$

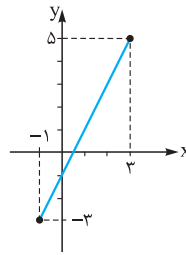
۶۸- گزینه: برای رسم تابع خطی که دامنه آن به صورت $a \leq x \leq b$

است، کافی است از دو نقطه به طول‌های $x = a$ و $x = b$ کمک بگیریم.

پس در این‌جا برای رسم $y = 2x - 1$ ، که دامنه‌اش $-1 \leq x \leq 3$ است،

نقاط سر و ته بازه دامنه یعنی -1 و 3 را جای x قرار می‌دهیم.

x	-1	3
$y = 2x - 1$	-3	5
نقطه	$(-1, -3)$	$(3, 5)$



پس کافی است نقاط $(-1, -3)$ و $(3, 5)$ را به هم وصل کنیم:

با شیب $m = 6$ و نقطه $A(2, -1)$ ، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-1) = 6(x - 2)$$

$$\Rightarrow y + 1 = 6x - 12 \Rightarrow y = 6x - 13$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 6x - 13$ است.

حالا مقدار $f(0/2)$ و $f(-0/2)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(0/2) = 6(0/2) - 13 = 1/2 - 13 = -11/8$$

$$f(-0/2) = 6(-0/2) - 13 = -1/2 - 13 = -14/2$$

$$f(0/2) - f(-0/2) = -11/8 - (-14/2)$$

$$= -11/8 + 14/2 = 2/4$$

۷۲- گزینه دماسنج از رابطه خطی پیروی می‌کند.

دمای 30°C را 70 نشان می‌دهد. \leftarrow نقطه $A(30, 70)$

دمای 50°C را 120 نشان می‌دهد. \leftarrow نقطه $B(50, 120)$

حالا معادله خط گذرنده از دو نقطه A و B را می‌نویسیم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{120 - 70}{50 - 30} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$$

اول شیب:

با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن (مثلاً A)، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 70 = \frac{5}{2}(x - 30)$$

$$\Rightarrow y - 70 = \frac{5}{2}x - 75 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - 5$$

برای این که بینیم این دماسنج، دمای 0°C را با چه عددی نشان می‌دهد

باید در رابطه $y = \frac{5}{2}x - 5$ جای x ، عدد صفر را قرار دهیم:

$$y = \frac{5}{2}(0) - 5 = 0 - 5 = -5$$

۷۳- گزینه x تا کالا داریم. هر کدام را 90 تومان می‌فروشیم. پس

$90x$ تومان درآمد داریم. حالا درآمد یعنی $90x$ را منهای هزینه یعنی

$40x + 6000$ می‌کنیم تا سود به دست آید: هزینه - درآمد = سود

$$= 90x - (6000 + 40x) = 90x - 6000 - 40x = 50x - 6000$$

می‌خواهیم به سوددهی برسیم، پس سود باید مثبت باشد.

$$50x - 6000 > 0 \Rightarrow 50x > 6000 \Rightarrow x > \frac{6000}{50} = 120$$

پس اگر 121 کالا بفروشیم سوددهی آغاز می‌شود. در واقع بعد از فروش

120 کالا، بره‌بر کرده‌ایم!

۷۴- گزینه فرض کنیم دمای اولیه برحسب سانتی‌گراد

برابر C باشد. چون افزایش دما برحسب سانتی‌گراد 15 واحد بوده است،

پس دمای ثانویه آن برحسب سانتی‌گراد برابر $C + 15$ است. در هر دو حالت

دما را برحسب فارنهایت حساب می‌کنیم:

$$F_1 = \frac{9}{5}C + 32$$

حالت اول:

$$F_2 = \frac{9}{5}(C + 15) + 32 = \frac{9}{5}C + \frac{9}{5}(15) + 32 = \frac{9}{5}C + 32 + 27$$

با مقایسه F_1 و F_2 متوجه می‌شویم که F_2 ، 27 واحد از F_1 بیشتر است، پس

دما برحسب فارنهایت 27 درجه افزایش یافته است.

در معادله خطی به شکل $y = mx + h$ به ازای هر 1 واحد افزایش

x ، y به میزان m واحد افزایش می‌یابد.

روش دوم در این جا چون شیب رابطه خطی $F = \frac{9}{5}C + 32$ برابر با $\frac{9}{5}$

۶۹- گزینه قرار است محیط را برحسب عرض آن یعنی x بنویسیم. از

آن جایی که طول آن 3 واحد بیشتر از عرض است، پس طول آن برابر با $x + 3$

است. محیط مستطیل مساوی با 2 برابر مجموع طول و عرض آن است، پس:

$$\text{عرض طول} = 2(\text{عرض} + \text{طول}) = 2(x + 3 + x)$$

$$= 2(2x + 3) = 4x + 6$$

پس تابع محیط مستطیل برحسب عرض آن (یعنی x) برابر است با:

$$f(x) = 4x + 6$$

۷۰- گزینه چون $f(-9) = -23$ است، پس f از نقطه

$B(-9, -23)$ می‌گذرد. از طرفی f از نقطه $A(6, -3)$ نیز می‌گذرد.

شیب خط گذرنده از A و B را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-23 - (-3)}{-9 - 6} = \frac{-20}{-15} = \frac{4}{3}$$

حالا با شیب و یک نقطه، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\substack{m = \frac{4}{3} \\ (6, -3) \\ \downarrow \downarrow \\ x_0, y_0}} y - (-3) = \frac{4}{3}(x - 6)$$

$$\Rightarrow y + 3 = \frac{4}{3}x - \frac{24}{3} \Rightarrow y + 3 = \frac{4}{3}x - 8$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 8 - 3 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 11$$

حالا جای y ، عبارت $f(x)$ را قرار می‌دهیم تا ضابطه f به دست آید:

$$f(x) = \frac{4}{3}x - 11$$

حالا $f(\frac{3}{2})$ و $f(\frac{-3}{2})$ را جداگانه حساب می‌کنیم و سپس تفاضل آن‌ها را

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}(\frac{3}{2}) - 11 = 2 - 11 = -9$$

$$f(\frac{-3}{2}) = \frac{4}{3}(\frac{-3}{2}) - 11 = -2 - 11 = -13$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} f(\frac{3}{2}) - f(\frac{-3}{2}) = -9 - (-13) = -9 + 13 = 4$$

۷۱- گزینه زوج مرتب روی f را سؤال داده، ما از 2 تای آن‌ها به

دلخواه خودمان کمک می‌گیریم؛ مثلاً $A(2, -1)$ و $B(3, 5)$.

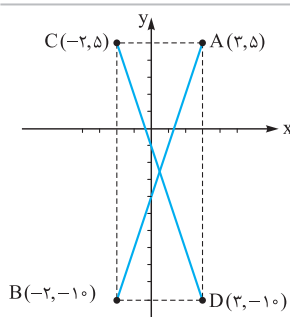
معادله خط گذرنده از این دو نقطه را می‌نویسیم. اول شیب:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{3 - 2} = 6$$

است، پس به ازای هر واحد افزایش F, C به اندازه $\frac{9}{5}$ واحد افزایش می‌یابد،
پس به ازای ۱۵ واحد افزایش F, C به اندازه $\frac{9}{5} \times ۱۵$ واحد افزایش می‌یابد:
 $\frac{9}{5} \times ۱۵ = ۹ \times ۳ = ۲۷$

۷۵- گزینه ۲ از سال ۱۳۸۵ که جمعیت ۸۵۰۰۰۰ نفر بوده تا سال ۱۳۹۵ که جمعیت ۱۰۳۰۰۰۰ نفر بوده، رشد جمعیت برابر است با:
 $۱۰۳۰۰۰۰ - ۸۵۰۰۰۰ = ۱۸۰۰۰۰$

یعنی به ازای هر ۱۰ سال جمعیت ۱۸۰۰۰۰ زیاد می‌شود که به بیان دیگر می‌شود: در هر سال، جمعیت ۱۸۰۰۰ نفر زیاد می‌شود. از سال ۱۳۹۵ تا ۱۴۲۰ می‌شود ۲۵ سال؛ یعنی ۲۵ تا ۱۸۰۰۰ نفر به جمعیت باید اضافه شود.
 ۱۴۲۰ جمعیت سال $= ۱۳۹۵$ جمعیت سال $+ (۲۵ \times ۱۸۰۰۰)$
 $= ۱۰۳۰۰۰۰ + ۴۵۰۰۰۰ = ۱۴۸۰۰۰۰$



۷۶- گزینه ۲ تابع خطی گفته شده، دو حالت دارد. هر دو حالت را در دستگاه روبرو رسم می‌کنیم: جواب، یکی از دو خط AB یا CD است. معادله هر دو را می‌نویسیم:

۱ معادله خط AB : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 5}{-2 - 3} = \frac{-6}{-5} = 3$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = 3(x - 3) \rightarrow y = 3x - 4$

پس در این حالت ضابطه f به شکل $f(x) = 3x - 4$ است که در گزینه‌ها نیامده.

۲ معادله خط CD : $m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-1 - 5}{3 - (-2)} = \frac{-6}{5} = -3$

$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 5 = -3(x - (-2))$

$\Rightarrow y - 5 = -3x - 6 \Rightarrow y = -3x - 1$

در این حالت ضابطه f به صورت $f(x) = -3x - 1$ است که در **۱** آمده است.