

(فصل ۴)

تجسم فضایی

- درس ۱: خط، نقطه و صفحه ۷۱
 درس ۲: تفکر تجسمی ۷۶
 درس ۳: برش و سطح مقطع برش ۷۹
 درس ۴: دوران حول یک محور ۸۲

(فصل ۵)

دایره

- درس ۱: مفاهیم اولیه، مماس، قاطع و زاویه در دایره ۸۵
 درس ۲: روابط طولی در دایره ۹۷
 درس ۳: چند ضلعی‌های محیطی و محاطی ۱۰۶

(فصل ۶)

تبدیل‌های هندسی و کاربردها

- درس ۱: تبدیل‌های هندسی ۱۱۵
 درس ۲: کاربرد تبدیلات در حل مسائل هندسی ۱۲۷

(فصل ۷)

روابط طولی در مثلث

- درس ۱: قضیه سینوس‌ها در مثلث ۱۳۱
 درس ۲: قضیه کسینوس‌ها در مثلث ۱۳۳
 درس ۳: ویژگی نیمساز زاویه‌های داخلی و طول نیمسازها ۱۳۸
 درس ۴: قضیه هرون ۱۴۰

۱۴۴ پاسخ‌نامه تشریحی

۲۴۰ پاسخ‌نامه کلیدی

(فصل ۱)

ترسیم‌های هندسی و استدلال

- درس ۱: ترسیم هندسی ۷
 درس ۲: استدلال و انواع آن ۱۷

(فصل ۲)

قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

- درس ۱: نسبت و تناسب ۲۷
 درس ۲: قضیه تالس ۳۱
 درس ۳: تشابه شکل‌های هندسی ۳۷
 درس ۴: نسبت اجزای فرعی در دو مثلث متشابه ۴۴

(فصل ۳)

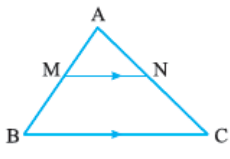
چندضلعی‌ها

- درس ۱: چندضلعی ۴۹
 درس ۲: مساحت و کاربردهای آن ۶۱

قضیه تالس

قضیه تالس

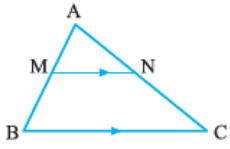
اگر خطی با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یکی از این دو ضلع پدید می‌آورد برابر است با نسبت پاره‌خط‌های نظیری که روی ضلع دیگر پدید می‌آورد؛ به بیان دیگر، اگر در



شکل مقابل، $MN \parallel BC$ باشد، آن‌گاه $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

نتایجی از قضیه تالس

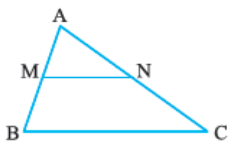
اگر در مثلث ABC، MN موازی BC باشد، آن‌گاه با استفاده از تالس و ویژگی‌های تناسب، خواهیم داشت:



- ۱ $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$ نسبت جزء به کل
- ۲ $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC}$ نسبت جزء به جزء
- ۳ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ تعمیم قضیه تالس

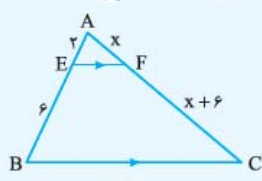
عکس قضیه تالس

اگر در مثلث ABC، نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و AC چنان انتخاب شوند که $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ، آن‌گاه نتیجه می‌شود پاره‌خط MN با ضلع BC موازی است.



فصل دوم تشابه

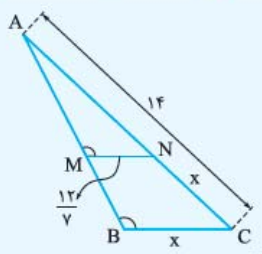
تست اگر در شکل مقابل $EF \parallel BC$ باشد، آن‌گاه مقدار x کدام است؟



- ۲ (۱)
۲ (۲)
۳/۵ (۳)
۳/۵ (۴)

پاسخ گزینه ۲ چون $EF \parallel BC$ ، با توجه به قضیه تالس داریم:
 $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{x}{x+6} \Rightarrow 2x+12=6x \Rightarrow x=2$

تست در شکل مقابل، اگر زاویه‌های B و M برابر باشند، اندازه x کدام است؟

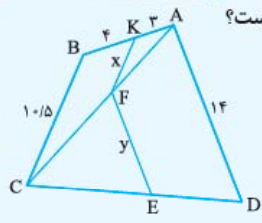


- (۱) فقط ۲
(۲) فقط ۱۲
(۳) مقداری برای x وجود ندارد.
(۴) ۲ یا ۱۲

پاسخ گزینه ۴ چون زاویه‌های B و M برابرند، پس بنا بر ویژگی خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌شود $MN \parallel BC$ و بنا بر تعمیم قضیه تالس داریم:

$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{12}{x} = \frac{14-x}{14} \Rightarrow x(14-x) = \frac{12}{14} \times 14 \Rightarrow x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=12 \end{cases}$

تست در شکل مقابل، $EF \parallel AD$ و $KF \parallel BC$ است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، حاصل x + y کدام است؟



- (۱) ۱۵/۵
(۲) ۱۴/۵
(۳) ۱۰/۵
(۴) ۱۲/۵

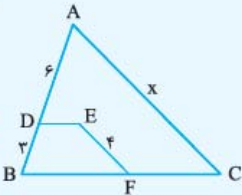
پاسخ گزینه ۳: در مثلث ABC چون $KF \parallel BC$ است، بنا بر نتایج تالس داریم:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{KF}{BC} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{3}{3+4} = \frac{x}{10/5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{7} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{AC-AF}{AC} = \frac{7-3}{7} \Rightarrow \frac{CF}{AC} = \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} = \frac{x}{10/5} \Rightarrow 7x = 31/5 \Rightarrow x = 4/5 \end{cases}$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{FE}{AD} \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{y}{14} \Rightarrow y = 8$$

در مثلث ACD چون $FE \parallel AD$ است، بنا بر نتیجه تالس داریم:
در نتیجه $x + y = 4/5 + 8 = 12/5$.

تست در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AC$ است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، مقدار x کدام است؟



(۱) ۹/۵

(۲) ۱۰

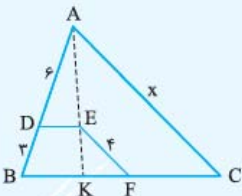
(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

پاسخ گزینه ۳: از A به E وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطه K قطع کند. در مثلث AKB

چون $DE \parallel BK$ است، پس بنا بر نتیجه تالس داریم:

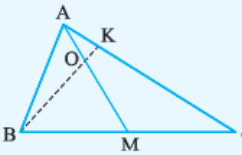
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AK} \Rightarrow \frac{6}{6+3} = \frac{AE}{AK} \Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{AK-AE}{AK} = \frac{3-2}{3} \Rightarrow \frac{KE}{AK} = \frac{1}{3}$$



$$\frac{EK}{AK} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 12$$

چون $EF \parallel AC$ داریم.

تست در شکل روبه‌رو، اگر نقطه O میانه AM را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کند و نقطه K برخورد امتداد BO با AC باشد، BK چند برابر OK است؟



(۱) ۱/۵

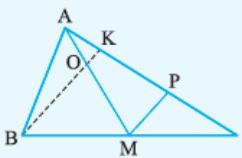
(۲) ۶

(۳) ۲/۲۵

(۴) ۲/۵

پاسخ گزینه ۱: چون نقطه O میانه AM را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است، پس $\frac{AO}{OM} = \frac{1}{2}$. اگر ترکیب

نسبت در مخرج کنیم، خواهیم داشت $\frac{AO}{AO+OM} = \frac{1}{1+2}$ یا $\frac{AO}{AM} = \frac{1}{3}$. از نقطه M، خطی موازی با BK رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه P قطع کند. اکنون بنا بر تعمیم قضیه تالس در مثلث AMP داریم:

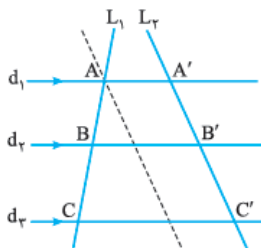


$$\frac{AO}{AM} = \frac{OK}{MP} \Rightarrow \frac{OK}{MP} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

در مثلث BCK نیز بنا بر تالس داریم $\frac{BK}{MP} = \frac{BC}{MC}$ یا $\frac{BK}{MP} = 2$ (۲) چنانچه دو رابطه (۱) و (۲) را بر یکدیگر تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود $\frac{BK}{OK} = 6$. پس BK برابر ۶ برابر OK است.

قضیه تالس در حالت کلی‌تر

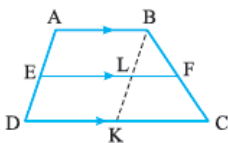
قضیه اگر چند خط موازی، دو خط مورب را قطع کنند، پاره‌خط‌های متناظر ایجاد شده روی آن دو خط، با هم متناسب‌اند؛ یعنی در شکل مقابل، داریم:



$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{یا} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

قضیه تالس در ذوزنقه

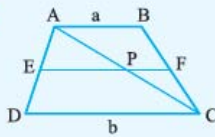
قضیه اگر خطی موازی دو قاعده ذوزنقه رسم شود، روی ساق‌ها پاره‌خط‌های متناظر متناسب ایجاد می‌کند؛ یعنی در شکل



مقابل، اگر $EF \parallel AB \parallel DC$ ، نتیجه می‌شود $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ و برعکس اگر $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ ، آن‌گاه $EF \parallel AB \parallel DC$.

تست اگر روی ساق‌های دوزنقه ABCD با قاعده‌های a و b، نقطه‌های E و F را چنان انتخاب کنیم که $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} = k$ باشد، اندازه EF کدام است؟

- (۱) $kb + (1-k)a$ (۲) $ka + (1-k)b$ (۳) $kb + (1+k)a$ (۴) $ka + (1+k)b$

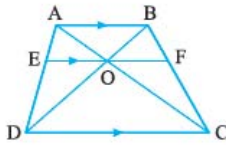


پاسخ گزینه ۱ چون $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ پس $EF \parallel AB \parallel DC$. اگر قطر AC را رسم کنیم، در دو مثلث ABC و ACD با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\begin{aligned} \Delta ADC: EP \parallel DC &\Rightarrow \frac{EP}{DC} = \frac{AE}{AD} = k \Rightarrow \frac{EP}{b} = k \Rightarrow EP = kb \quad (1) \\ \Delta ABC: FP \parallel AB &\Rightarrow \frac{PF}{AB} = \frac{FC}{BC} \Rightarrow \frac{PF}{a} = \frac{BC-BF}{BC} \Rightarrow \frac{PF}{a} = 1 - \frac{BF}{BC} = 1-k \Rightarrow PF = (1-k)a \quad (2) \end{aligned}$$

اگر روابط (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود: $EF = kb + (1-k)a$ یا $EP + PF = kb + (1-k)a$

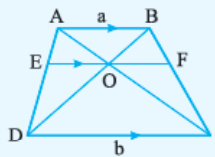
چند نتیجه مهم از قضیه تالس در دوزنقه



نتیجه ۱ در هر دوزنقه، پاره‌خطی که از محل برخورد دو قطر به موازات قاعده‌های آن رسم شده و به دو ساق محدود باشد، در نقطه برخورد دو قطر، نصف می‌شود؛ یعنی در شکل مقابل داریم $EO = OF$.

تست در دوزنقه ABCD با قاعده‌های a و b، طول پاره‌خطی که از نقطه برخورد دو قطر، موازی قاعده‌ها رسم می‌شود، کدام است؟

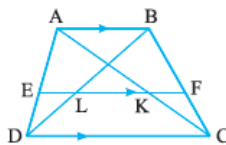
- (۱) $\frac{2ab}{|a-b|}$ (۲) $\frac{ab}{a+b}$ (۳) $\frac{2ab}{a+b}$ (۴) $\frac{ab}{|a-b|}$



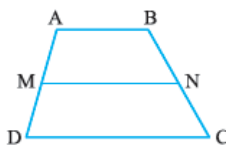
پاسخ گزینه ۳ بنا بر نتیجه ۱ می‌دانیم $EO = OF = x$. اگر فرض کنیم $EO = OF = x$ ، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} \Delta ADC: \frac{x}{b} &= \frac{AO}{AC} \\ \Delta ABC: \frac{x}{a} &= \frac{CO}{AC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{x}{b} + \frac{x}{a} = \frac{AO}{AC} + \frac{CO}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow EF = 2x = \frac{2ab}{a+b}$$

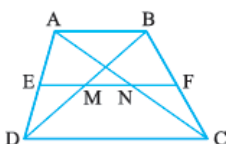


نتیجه ۲ در هر دوزنقه، اگر خطی به موازات دو قاعده آن رسم شود تا ساق‌ها و قطر‌ها را قطع کند، پاره‌خط‌های محدود به ساق‌ها و قطر‌ها با هم برابرند؛ یعنی در شکل مقابل با فرض $EF \parallel AB \parallel DC$ داریم $EL = KF$ یا $EK = FL$.



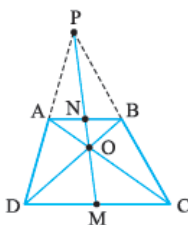
نتیجه ۳ در هر دوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند (میان‌خط در دوزنقه)، موازی قاعده‌های دوزنقه و برابر میانگین دو قاعده است؛ یعنی در دوزنقه شکل مقابل، اگر M و N وسط‌های دو ساق باشند، داریم:

$$MN = \frac{AB + CD}{2} \text{ و } MN \parallel AB$$



نتیجه ۴ در هر دوزنقه، وسط‌های دو ساق و وسط‌های دو قطر آن بر یک راستا قرار دارند و طول پاره‌خطی که وسط‌های دو قطر را به هم وصل می‌کند، نصف قدرمطلق تفاضل دو قاعده دوزنقه است؛ یعنی در شکل مقابل با فرض آن‌که نقاط E و F وسط‌های دو ساق و نقاط M و N وسط‌های دو قطر باشند، آن‌گاه این چهار نقطه بر یک راستا هستند و در ضمن

$$MN = \frac{DC - AB}{2}$$



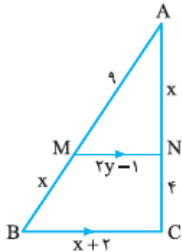
نتیجه ۵ در هر دوزنقه، دو نقطه وسط قاعده‌ها، نقطه برخورد دو قطر و نقطه برخورد امتداد دو ساق آن، بر یک راستا قرار دارند؛ یعنی در شکل مقابل، اگر M و N وسط‌های دو قاعده دوزنقه باشند، آن‌گاه نقاط P، N، O، M بر یک راستا هستند.



۱۲۱- در مثلث TUV، دو نقطه W و X را به ترتیب روی TU و TV طوری در نظر گرفته‌ایم که $WX \parallel UV$. نسبت $\frac{UV}{WX}$ با کدام نسبت برابر است؟

(۱) $\frac{XV}{VT}$ (۲) $\frac{UT}{WT}$ (۳) $\frac{TV}{XV}$ (۴) $\frac{UW}{TW}$

(کتاب درسی هندسه ۱، برگرفته از تمرین)



۱۲۲- در شکل روبه‌رو MN با BC موازی است. y کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{6}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{2}{8}$ (۴) $\frac{2}{9}$

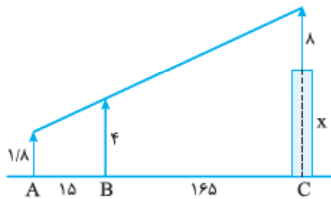
۱۲۳- علی که قد او 180° سانتی‌متر است، در اطراف یک درخت طوری ایستاده است که نوک سایه او بر نوک سایه درخت منطبق شده است. اگر طول سایه علی چهار متر و فاصله او تا درخت بیست متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟

(کتاب درسی هندسه ۱، برگرفته از تمرین)

- (۱) $\frac{10}{2}$ (۲) $\frac{10}{4}$ (۳) $\frac{10}{6}$ (۴) $\frac{10}{8}$

۱۲۴- در شکل مقابل، دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. چشم ناظر به ارتفاع $\frac{1}{8}$ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟

(سراسری ریاضی ۸۷)



- (۱) $\frac{19}{8}$ (۲) $\frac{20}{2}$ (۳) $\frac{20}{8}$ (۴) $\frac{21}{2}$

۱۲۵- در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

(سراسری تیرگی ۹۳)

- (۱) $\frac{11}{5}$ (۲) $\frac{11}{6}$ (۳) $\frac{12}{2}$ (۴) $\frac{12}{8}$

۱۲۶- اندازه‌های قاعده‌های یک دوزنقه قائم‌الزاویه، ۳ و ۱۲ واحد هستند. اگر فاصله نقطه تقاطع امتدادهای ساق‌ها از دورترین رأس دوزنقه 20° واحد باشد، فاصله آن تا نزدیک‌ترین رأس دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۲۷- در هر مربع فاصله وسط هر ضلع از قطر مربع، چند برابر طول ضلع است؟

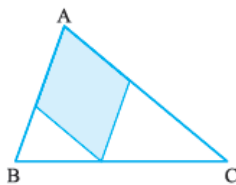
- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۸- در شکل روبه‌رو، مربع‌هایی به طول ضلع‌های ۲، ۳ و ۴ واحد کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت قسمت رنگی، چند واحد مربع است؟



- (۱) $\frac{13}{3}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{14}{3}$ (۴) ۵

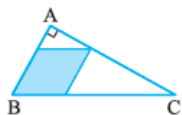
۱۲۹- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی مشخص شده یک لوزی به طول ضلع x است. اگر $AC = b$ و $AB = c$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟



(۱) $x = |b - c|$ (۲) $\frac{1}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(۳) $x^2 = a \cdot b$ (۴) $x = \frac{a+b}{2}$

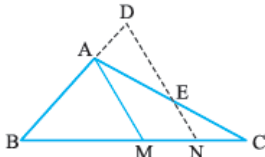
۱۳۰- در شکل روبه‌رو، مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع قائمه ۶ و ۸ واحد و چهارضلعی مشخص شده لوزی است. طول ضلع این لوزی کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{4}{5}$

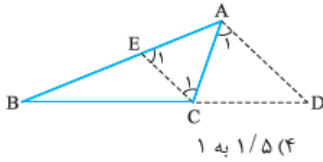
۱۳۱- دو نقطه P و Q را به ترتیب روی دو ضلع AB و AC از مثلث ABC طوری در نظر می‌گیریم که $\hat{APQ} = \hat{B}$ ، اگر $\frac{PQ}{3} = \frac{AP}{4} = \frac{BC}{5} = 2$ ، آن‌گاه طول BP کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{14}{3}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{16}{3}$



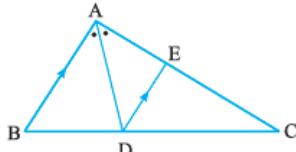
۱۳۲- در مثلث ABC که در آن $AB = \frac{2}{3}AC$ ، پاره خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟
(سراسری ریاضی ۹۳)

- (۱) $\frac{4}{9}$
(۲) $\frac{5}{9}$
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{4}{5}$



۱۳۳- مطابق شکل، نقطه D را روی امتداد ضلع BC و نقطه E را روی ضلع AB از مثلث ABC که در آن $AB = 15$ و $AC = 6$ ، طوری در نظر گرفته ایم که $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \hat{E}_1$. نقطه C پاره خط BD را به چه نسبتی تقسیم کرده است؟

- (۱) ۱ به ۱
(۲) ۱/۲ به ۱
(۳) ۱/۴ به ۱
(۴) ۱/۵ به ۱



۱۳۴- مطابق شکل، در مثلث ABC که در آن $AB = 3AC = 60$ نیمساز AD را رسم و از نقطه D، پاره خط DE را به موازات AB رسم کرده ایم. طول AE کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{5}$
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) $\frac{9}{5}$

۱۳۵- مثلث ABC را به طول ضلع های ۴، ۵ و ۶ در نظر می گیریم. از نقطه همرسی نیمسازهای داخلی، خطی به موازات ضلع بزرگ تر رسم می کنیم. فاصله نقاط برخورد این خط با دو ضلع دیگر مثلث کدام است؟

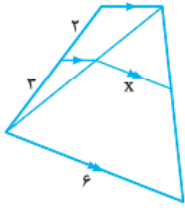
- (۱) ۳
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{3}{6}$

۱۳۶- در مثلث قائم الزاویه ABC، $AB = 5$ و $AC = 4$ ضلع های زاویه قائمه اند. نقطه M وسط وتر است و نقطه P روی AB طوری قرار دارد که $AP = 1$. طول پاره خط MP کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $\frac{2}{25}$
(۳) $\frac{2}{5}$
(۴) $\frac{2}{75}$

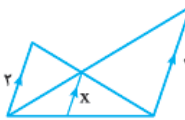
۱۳۷- در شکل روبه رو، دو جفت پاره خط موازی مشخص شده اند. x کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
(۲) ۲
(۳) $\frac{2}{2}$
(۴) $\frac{2}{4}$



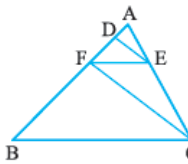
۱۳۸- در شکل روبه رو سه پاره خط موازی مشخص شده است. x کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{1}{5}$



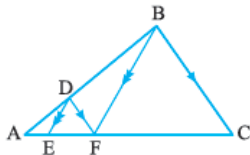
۱۳۹- در شکل مقابل $DE \parallel FC$ و $BC \parallel EF$ ، اگر $AD = 3$ و $DF = 6$ ، آن گاه BC چند برابر EF است؟

- (۱) ۲
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{2}{75}$
(۴) ۳



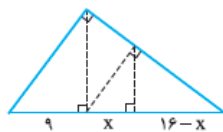
۱۴۰- در شکل روبه رو دو جفت پاره خط موازی مشخص شده اند، اگر طول BC سه برابر طول DF باشد، طول AC چند برابر طول EF است؟

- (۱) ۳
(۲) $\frac{3}{5}$
(۳) ۴
(۴) $\frac{4}{5}$



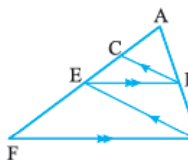
۱۴۱- در شکل مقابل، ارتفاع های هر سه مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{54}$
(۲) $\frac{5}{36}$
(۳) $\frac{5}{76}$
(۴) $\frac{6}{75}$

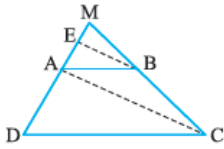


۱۴۲- در شکل روبه رو $EB \parallel FD$ و $BC \parallel DE$. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $CE^2 = AC \cdot FE$
(۲) $AC^2 = EC \cdot EF$
(۳) $AE^2 = AC \cdot AF$
(۴) $FE^2 = AE \cdot AC$

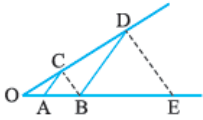


۱۴۳- در دوزنقه ABCD، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، فاصله MD کدام است؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۳)



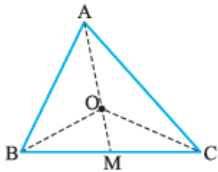
- (۱) ۱۲
(۲) $12/25$
(۳) $12/5$
(۴) $12/75$

۱۴۴- در شکل مقابل، دو جفت پاره خط موازی اند، اگر $OA = 3$ و $AB = 5$ ، آن گاه اندازه BE کدام است؟



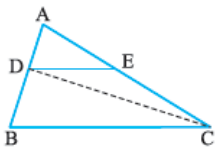
- (۱) $13\frac{1}{3}$
(۲) $12\frac{2}{3}$ (سراسری تهرانی خارج از کشور ۹۳)
(۳) $11\frac{1}{3}$
(۴) $10\frac{2}{3}$

۱۴۵- در شکل مقابل، مساحت های مثلث های ABC و OBC را به ترتیب S و S' می نامیم، نسبت $\frac{OM}{AM}$ برابر کدام است؟



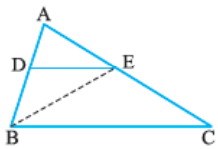
- (۱) $\frac{S}{S'}$
(۲) $(\frac{S}{S'})^2$
(۳) $\frac{S-S'}{S}$
(۴) $\frac{S'}{S}$

۱۴۶- در شکل مقابل $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$ و $DE \parallel BC$. مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟



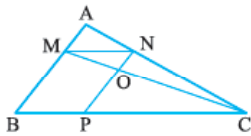
- (۱) ۷۰
(۲) ۷۵ (سراسری تهرانی ۸۹)
(۳) ۷۸
(۴) ۸۴

۱۴۷- در مثلث ABC، پاره خط DE موازی ضلع BC است و $AD = \frac{4}{5}DB$. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



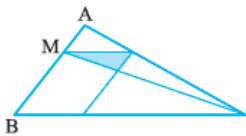
- (۱) ۲
(۲) $2/25$
(۳) $2/5$
(۴) $2/75$ (سراسری ریاضی ۹۳)

۱۴۸- در شکل مقابل، $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$ و چهارضلعی MNPB متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



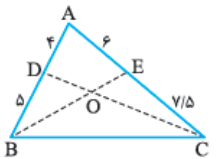
- (۱) ۶۳
(۲) ۶۰
(۳) ۷۰
(۴) ۸۴ (سراسری تهرانی ۹۰)

۱۴۹- در شکل مقابل، اگر $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ ، آن گاه مساحت مثلث رنگ شده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟



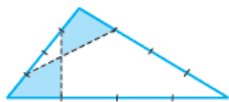
- (۱) ۲۰
(۲) ۲۴ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)
(۳) ۲۵
(۴) ۳۰

۱۵۰- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{4}{5}$ (سراسری تهرانی خارج از کشور ۸۷)
(۳) $\frac{5}{6}$
(۴) ۱

۱۵۱- در شکل مقابل، هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی رنگ شده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



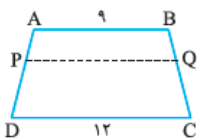
- (۱) هم مساحت
(۲) هم محیط
(۳) هم نهشت
(۴) متشابه (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

تالس در دوزنقه

۱۵۲- در دوزنقه ای به طول قاعده های a و b، از نقطه محل برخورد قطرها خطی به موازات دو قاعده رسم می کنیم. اگر طول پاره خطی که ساق های دوزنقه از این خط جدا می کنند x باشد، آن گاه کدام گزینه درست است؟

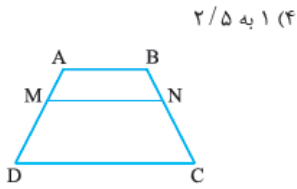
- (۱) $x = \frac{a+b}{2}$
(۲) $x = \sqrt{ab}$
(۳) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
(۴) $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

۱۵۳- در شکل روبه رو، PQ با قاعده های دوزنقه موازی است. اگر $AB = 9$ ، $CD = 12$ و طول PD دو برابر PA باشد، طول PQ کدام است؟



- (۱) $9/75$
(۲) ۱۰
(۳) $10/25$
(۴) $10/5$

۱۵۴- در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۴ و ۱۳ واحد می‌خواهیم روی هر ساق یک نقطه انتخاب کنیم که با وصل کردن این دو نقطه، پاره‌خطی به طول ۱۰ واحد، موازی قاعده‌ها ایجاد شود. نقاط انتخاب شده باید ساق‌ها را به نسبت تقسیم کنند.



۱۵۵- مطابق شکل، در دوزنقه ABCD اگر $AB = 3$ ، $DC = 6$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$ ، آن‌گاه:

$$MN = \frac{9}{7} \quad (۲)$$

$$MN = \frac{13}{4} \quad (۱)$$

$$MN = 5 \quad (۴)$$

$$MN = 4 \quad (۳)$$

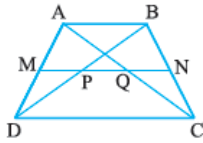
۱۵۶- در دوزنقه شکل مقابل $AM = MD$ و $BN = NC$ اگر $CD = 3AB$ ، آن‌گاه:

$$PQ = \frac{CD}{6} \quad (۲)$$

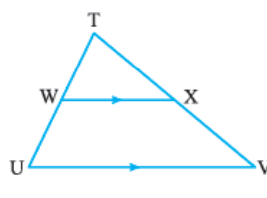
$$PQ = \frac{2CD}{3} \quad (۱)$$

$$PQ = \frac{CD}{3} \quad (۴)$$

$$PQ = \frac{4CD}{9} \quad (۳)$$



۱۲۱- گزینه ۲ با استفاده از قضیه تالس و نسبت جزء به کل داریم:



$$\frac{WX}{UV} = \frac{WT}{TU}$$

معکوس $\rightarrow \frac{UV}{WX} = \frac{TU}{WT}$

۱۲۲- گزینه ۴ با استفاده از قضیه تالس و نسبت جزء به جزء داریم:

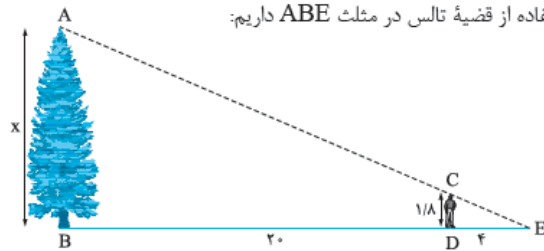
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

و با استفاده از نتیجه قضیه تالس داریم:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{2y-1}{x+2} = \frac{x}{x+4} \xrightarrow{x=6} \frac{2y-1}{8} = \frac{6}{10}$$

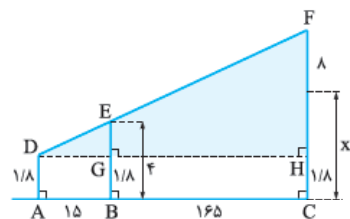
$$\Rightarrow \frac{2y-1}{8} = \frac{3}{5} \Rightarrow 10y-5=24 \Rightarrow 10y=29 \Rightarrow y=2.9$$

۱۲۳- گزینه ۴ شکل زیر را در نظر می‌گیریم؛ چون $CD \parallel AB$ با استفاده از قضیه تالس در مثل ABE داریم:



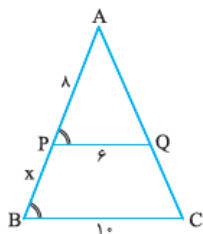
$$\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE} \Rightarrow \frac{1/8}{x} = \frac{4}{24} \Rightarrow x = \frac{1/8 \times 24}{4} = 10/8$$

۱۲۴- گزینه ۲ از D عمودی بر FC رسم می‌کنیم؛ مطابق شکل با به کار بردن قضیه تالس در مثل DFH داریم:



۱۳۰- گزینه ۱ از آنجا که $AB = 6$ و $AC = 8$ ، از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC = 10$. از سؤال قبل نتیجه می‌گیریم که اگر طول ضلع لوزی x باشد، داریم: $\frac{1}{x} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AB} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{6+10}{60} \Rightarrow x = \frac{60}{16} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

۱۳۱- گزینه ۱ $\frac{PQ}{3} = \frac{AP}{4} = \frac{BC}{5} = 2 \Rightarrow \begin{cases} PQ = 6 \\ AP = 8 \\ BC = 10 \end{cases}$



شکل مناسب را می‌کشیم. از آنجا که $\hat{B} = \hat{A}PQ$ موازی و مورب PQ با BC موازی است و می‌توانیم از قضیه تالس استفاده کنیم:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{8}{8+x} = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{8+x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 8 \times 5 = 3(8+x) \Rightarrow 40 = 24 + 3x \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

۱۳۲- گزینه ۳ با به کار بردن قضیه تالس در مثلث ACM داریم:



$$\frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \quad (\#)$$

با به کار بردن قضیه تالس در مثلث BDN داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \quad (\#\#)$ طبق فرض، $AM = CM$ است، پس $BM = CM$ ، در این صورت سمت راست تساوی‌های $(\#)$ و $(\#\#)$ با هم برابر و در نتیجه سمت چپ آن‌ها

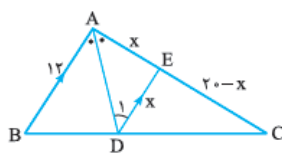
با هم برابر است: $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \xrightarrow{\text{تعویض جای طرفین}} \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$
 $\xrightarrow{AB = \frac{2}{3}AC} \frac{\frac{2}{3}AC}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$

۱۳۳- گزینه ۲ مثلث ACE در رأس A متساوی‌الساقین است، پس $AE = AC = 6$. در نتیجه $BE = AB - AE = 9$. از طرفی $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$.

پس بنا به عکس قضیه خطوط موازی و مورب $EC \parallel AD$. حالا با استفاده از قضیه تالس در مثلث ABD داریم:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BE}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

۱۳۴- گزینه ۱



$$\begin{cases} AB \parallel DE \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{DAB} = \hat{A} \\ AD \text{ مورب} \end{cases} \xrightarrow{D\hat{A}E = \hat{A}} \hat{D}_1 = \hat{DAE}$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد مثلث ADE متساوی‌الساقین است، پس $AE = DE = x$. از $AE = DE = x$ نتیجه می‌شود:

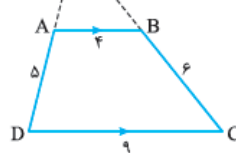
$$AB = \frac{60}{5} = 12, \quad AC = \frac{60}{3} = 20$$

$$\frac{EG}{FH} = \frac{DG}{DH} \Rightarrow \frac{4-1/8}{(x+8)-1/8} = \frac{15}{15+165}$$

$$\Rightarrow \frac{2/2}{x+6/2} = \frac{15}{180} \Rightarrow \frac{2/2}{x+6/2} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow x+6/2 = 2/2 \times 12 \Rightarrow x+6/2 = 26/4 \Rightarrow x = 20/2$$

۱۲۵- گزینه ۲ با استفاده از قضیه تالس در مثلث OCD داریم:



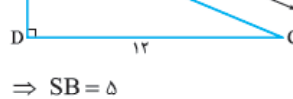
$$\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OA}{OA+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 9OA = 4OA + 20 \Rightarrow 5OA = 20 \Rightarrow OA = 4$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OB}{OB+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9OB = 4OB + 24 \Rightarrow 5OB = 24 \Rightarrow OB = 4/5$$

$$\Rightarrow OAB \text{ محیط مثلث} = OA + OB + AB = 4 + 4/5 + 4 = 12/5$$

۱۲۶- گزینه ۱ با توجه به شکل و به کار بردن قضیه تالس در مثلث SCD داریم:



$$\frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{SB}{20} = \frac{3}{12}$$

$$\Rightarrow SB = 5$$

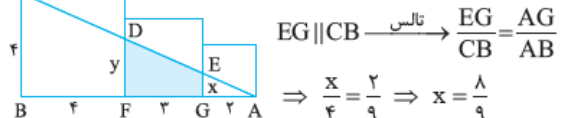
در مثلث قائم‌الزاویه ABS ، وتر $SB = 5$ و $AB = 3$ یک ضلع زاویه قائمه آن است. پس با توجه به قضیه فیثاغورس طول ضلع دیگر زاویه قائمه می‌شود 4 ؛ یعنی $SA = 4$.

۱۲۷- گزینه ۲ می‌دانیم در مربعی به طول ضلع a :

طول قطرها برابر $a\sqrt{2}$ است و قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، پس در شکل روبه‌رو، $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ در مثلث ABO ، M وسط AB و MH با AO موازی است، پس طبق قضیه تالس MH هم نصف AO است؛ یعنی

$$MH = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} a$$

۱۲۸- گزینه ۳ در مثلث ABC داریم:



$$\frac{EG}{CB} = \frac{AG}{AB}$$

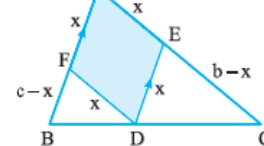
$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

$$DF \parallel CB \Rightarrow \frac{DF}{CB} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{y}{4} = \frac{5}{9} \Rightarrow y = \frac{20}{9}$$

چهارضلعی $DEGF$ یک دوزنقه به قاعده‌های $x = \frac{8}{9}$ و $y = \frac{20}{9}$ و ارتفاع $FG = 3$ ، پس مساحت آن می‌شود:

$$S = \frac{1}{2}(x+y) \cdot FG = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{9} + \frac{20}{9} \right) \times 3 = \frac{14}{3}$$

۱۲۹- گزینه ۲ با استفاده از قضیه تالس، داریم:



$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{b-x}{b}$$

$$\Rightarrow bx = bc - cx$$

$$\Rightarrow bx + cx = bc$$

$$\xrightarrow{+bcx} \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$$

با استفاده از قضیه تالس در مثلث BCD داریم: $\frac{BF}{BC} = \frac{x}{3}$ (***)
با جمع دو طرف تساوی‌های (*) و (***) داریم:

$$\frac{FC}{BC} + \frac{BF}{BC} = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{FC+BF}{BC} = \frac{2x+2x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC} = \frac{4x}{6} \Rightarrow \frac{4x}{6} = 1 \Rightarrow x = \frac{6}{4} = 1.5$$

اگر نکته زیر یادتان می‌ماند، حل این سوال ساده‌تر می‌شود، اگر هم یادتان نمی‌ماند که روش حل بالا را داشته باشید.

تذکر در شکل مقابل داریم:

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

اگر بخواهیم این سؤال را با نکته بالا حل کنیم، داریم:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{3+2}{6} \Rightarrow x = \frac{6}{5} = 1.2$$

۱۳۹- گزینه ۲ در مثلث ACF بنا به قضیه تالس، داریم:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DF} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

پس در نظر می‌گیریم $AE = x$ و $EC = 2x$ حالا با استفاده از قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{x}{x+2x} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 3EF$$

۱۴۰- گزینه ۲ $\Delta ABC : DF \parallel BC$

$$\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{x}{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB-AD} = \frac{x}{3x-x} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$$

پس می‌توانیم فرض کنیم $AD = y$ و $BD = 2y$ و از آنجا که در مثلث ABF، $DE \parallel BF$ ، با توجه به قضیه تالس می‌توان در نظر گرفت $AE = z$ و $EF = 2z$ از طرفی:

$$\Delta ABC : DF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AF}{FC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{2z}{FC} = \frac{y}{2y}$$

$$\Rightarrow FC = 6z$$

$$\frac{AC}{EF} = \frac{z+2z+6z}{2z} = \frac{9}{2} = 4.5$$

۱۴۱- گزینه ۳ با به کار بردن قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CE}{EA} \quad (**)$$

با به کار بردن قضیه تالس در مثلث ACD، داریم: $\frac{CF}{FD} = \frac{CE}{EA}$ (***)
از مقایسه (*) و (***) داریم:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CF}{FD} \Rightarrow \frac{(16-x)+x}{9} = \frac{16-x}{x} \Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{16-x}{x}$$

$$\Rightarrow 16x = 9 \times 16 - 9x \Rightarrow 25x = 9 \times 16 \Rightarrow x = \frac{9 \times 16}{25}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \times 16}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{9 \times 16 \times 4}{100} = \frac{576}{100} = 5.76$$

پس با استفاده از قضیه تالس، داریم:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{20-x}{20} \Rightarrow 20x = 20 \times 12 - 12x$$

$$\Rightarrow 32x = 20 \times 12 \Rightarrow x = \frac{20 \times 12}{32} = \frac{15}{2} = 7.5$$

۱۳۵- گزینه ۲ با توجه به شکل، از آنجا که I نقطه هم‌مرسی نیمسازهای داخلی است، اگر از آن به B و C وصل کنیم، زاویه‌های B و C نصف می‌شوند. از

طرفی طبق قضیه خطوط موازی و مورب، داریم $\hat{BIP} = \hat{B} = \hat{QIC} = \hat{C}$ ،

پس دو مثلث PIB و QIC متساوی‌الساقین هستند، فرض می‌کنیم

$PB = PI = x$ و $QC = QI = y$

با استفاده از قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\begin{cases} \frac{BP}{AB} = \frac{CQ}{AC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} \\ \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \frac{x+y}{6} = \frac{4-x}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 4y \\ 4(x+y) = 6(4-x) \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x = 1/6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow PQ = x + y = 2/6$$

۱۳۶- گزینه ۳ از نقطه M، عمود MH را بر AB وارد می‌کنیم. از آنجا

که M وسط BC است و $MH \parallel AC$ ، با استفاده از قضیه تالس نتیجه می‌گیریم هم H وسط AB است، پس $BH = \frac{AB}{2} = 2/5$ و در نتیجه

$$HP = BP - BH = 1/5$$

از طرفی پاره‌خط MH، وسط‌های دو ضلع مثلث ABC را به هم وصل کرده، پس طول آن نصف طول ضلع سوم است؛ یعنی

$$MH = \frac{AC}{2} = 2$$

در مثلث قائم‌الزاویه MHP، $MH = \frac{4}{5}$ و $HP = \frac{3}{5}$ ضلع‌های زاویه قائمه

هستند، پس طول وتر مثلث می‌شود $MP = \frac{5}{5} = 2/5$

۱۳۷- گزینه ۲ در مثلث DAB، $EF \parallel AB$ پس با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{DF}{FB} = \frac{DE}{EA} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{FB}{DF} = \frac{2}{3} \quad (**)$$

در مثلث BCD، $FG \parallel CD$ پس با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{FG}{CD} = \frac{BF}{BD} \xrightarrow{(**)} \frac{FG}{CD} = \frac{2}{3+2} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 2/4$$

۱۳۸- گزینه ۱ با استفاده از قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{FC}{BC} = \frac{x}{2} \quad (**)$$

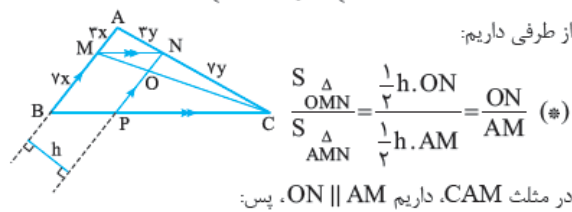
از طرفی $AD = \frac{4}{5}DB$ ، به عبارت دیگر $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$ ، پس در نظر می‌گیریم $AD = 4x$ و $DB = 5x$ از آن‌جا که $DE \parallel BC$ ، از قضیه تالس در مثلث

ABC استفاده می‌کنیم: $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{9x} = \frac{4x}{9x} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{9}{4}$

$\frac{S_{\Delta EBC}}{S_{\Delta EBD}} = \frac{9}{4} = 2/25$ (*)

۱۴۸- کزینه ۳: $MN \parallel BC$ ، پس با توجه به قضیه تالس $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{y}$

در نظر می‌گیریم $\begin{cases} AN = 2y \\ NC = y \end{cases}$ و $\begin{cases} MA = 2x \\ MB = y \end{cases}$



از طرفی داریم: در مثلث CAM، داریم $ON \parallel AM$ ، پس:

$\frac{ON}{AM} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{ON}{AM} = \frac{y}{10y} = \frac{1}{10} = 1/10$

$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta AMN}} = 1/10$ (*)

۱۴۹- کزینه ۱: از آن‌جا که $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ ، می‌توانیم در نظر بگیریم $MA = 2x$ و $MB = 3x$ و از آن‌جا که $MN \parallel BC$ ، $NC = 2y$ ، $AN = 2y$

از قضیه تالس می‌توانیم نتیجه بگیریم: $NP = MB = 3x$ ، پس $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. از طرفی چهارضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. پس $NP = MB = 3x$ ، و داریم:

$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{MNPB}} = \frac{\frac{1}{2}MH \cdot ON}{MH \cdot NP} = \frac{ON}{2NP} = \frac{ON}{2 \times 3x}$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta OMN}}{S_{MNPB}} = \frac{ON}{6x}$ (*)

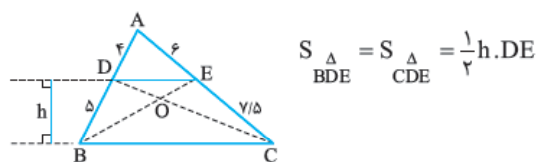
حالا اگر بتوانیم ON را برحسب x به دست آوریم، از تساوی (*) جواب سوال به دست می‌آید. مثلث AMC را ببینید، از موازی بودن AM و ON

نتیجه می‌گیریم: $\frac{ON}{AM} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{ON}{2x} = \frac{2y}{5y} \Rightarrow ON = \frac{6x}{5}$

$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{MNPB}} = \frac{6x}{6x} = \frac{1}{5} = 1/5$ (*)

۱۵۰- کزینه ۲: با توجه به شکل داریم $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (زیرا $\frac{4}{5} = \frac{6}{15}$)

پس طبق عکس قضیه تالس $DE \parallel BC$ با BC موازی است. حالا می‌توان نتیجه گرفت:



۱۴۲- کزینه ۳: $\left. \begin{aligned} \Delta ADE : CB \parallel DE &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \\ \Delta AFD : EB \parallel FD &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF}$

$\Rightarrow AE^2 = AC \cdot AF$

۱۴۳- کزینه ۲: در نظر می‌گیریم $ME = x$ و از نتیجه سوال قبل استفاده می‌کنیم:

$MA^2 = ME \cdot MD$
 $\Rightarrow (x+2)^2 = x(x+3+y)$
 $\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 10x \Rightarrow 9 = 4x$
 $\Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2/25 \Rightarrow MD = 2/25 + 3 + 7 = 12/25$

۱۴۴- کزینه ۱: در نظر می‌گیریم $BE = x$ و از رابطه $OB^2 = OA \cdot OE$ استفاده می‌کنیم:

$(3+5)^2 = 2(2+5+x)$
 $\Rightarrow 64 = 3(8+x) \Rightarrow 8+x = \frac{64}{3}$
 $\Rightarrow x = \frac{64}{3} - 8 = \frac{40}{3} = \frac{29+1}{3} = 13 + \frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$

۱۴۵- کزینه ۲: در دو مثلث ABC و OBC ، قاعده BC مشترک است، ارتفاع‌های وارد بر BC را در این دو مثلث رسم می‌کنیم. نسبت مساحت‌های این دو مثلث، برابر با نسبت این دو ارتفاع است؛ یعنی:

$\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{OH'}{AH} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{OH'}{AH}$ (*)

از طرفی با به کار بردن قضیه تالس در مثلث AHM داریم:

$\frac{OM}{AM} = \frac{OH'}{AH} \xrightarrow{(*)} \frac{OM}{AM} = \frac{S'}{S}$

۱۴۶- کزینه ۲: $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{y}$ ، پس از آن‌جا که $DE \parallel BC$ داریم $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{y}$ و

در نظر می‌گیریم $AC = 7y$ و $AE = 2y$ ، $EC = 4y$ که نتیجه می‌دهد

با توجه به شکل دو مثلث ADE و DEC در ارتفاع h مشترک‌اند، پس

داریم: $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta DEC}} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot 2y}{\frac{1}{2}h \cdot 4y} = \frac{2}{4} = 1/2$

۱۴۷- کزینه ۲: ابتدا توجه کنید که:

$\frac{S_{\Delta EBC}}{S_{\Delta EBD}} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot BC}{\frac{1}{2}h \cdot DE} = \frac{BC}{DE}$ (*)

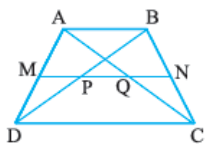
۱۵۵- گزینه ۳ وقتی دوتا سؤال پشت سر هم از فرمول $MN = kb + (1-k)a$ استفاده می‌کند؛ یعنی دیگر باید آن‌هایی هم که حافظه خوبی ندارند، فرمول را حفظ کنند!

داریم $a = 3$ ، $b = 6$ و $k = \frac{1}{3}$ ، پس: $MN = \frac{1}{3} \times 6 + \frac{2}{3} \times 3 = 4$

۱۵۶- گزینه ۲ همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم اگر M و N وسط‌های AD و BC باشند، آن‌گاه P و Q هم وسط‌های قطرها هستند و داریم: $PQ = \frac{CD - AB}{2}$

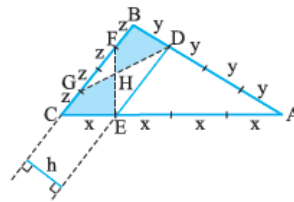
حالا اگر در نظر بگیریم $CD = 3AB$ ، داریم $AB = \frac{CD}{3}$ و در نتیجه:

$$PQ = \frac{CD - \frac{CD}{3}}{2} = \frac{\frac{2CD}{3}}{2} = \frac{CD}{3}$$



اگر از دو طرف تساوی $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle BDE} = S_{\triangle CDE}$ مقدار $S_{\triangle ODE}$ را کم کنیم، داریم:

$$S_{\triangle OBD} = S_{\triangle OCE}$$



۱۵۱- گزینه ۱ با توجه به شکل

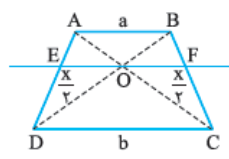
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} = 3$$

پس طبق عکس قضیه تالس $DE \parallel BC$ و داریم:

$$S_{\triangle CEF} = S_{\triangle BDG} = \frac{1}{2} h \times 3z$$

حالا اگر از دو طرف تساوی $S_{\triangle FGH} = S_{\triangle CEF} = S_{\triangle BDG}$ را کم کنیم، داریم:

$$S_{\triangle CEHG} = S_{\triangle BDHF}$$



۱۵۲- گزینه ۲ می‌دانیم $OE = OF$ ، پس طول هر کدام می‌شود $\frac{x}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADC: \frac{EO}{DC} = \frac{AO}{AC} \\ \triangle ABC: \frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \frac{EO}{DC} + \frac{OF}{AB} = \frac{AO}{AC} + \frac{OC}{AC}$$

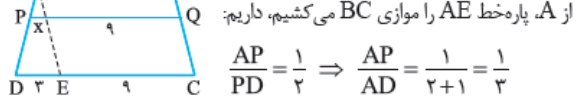
$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{b} + \frac{\frac{x}{2}}{a} = 1 \xrightarrow{\times \frac{2}{x}} \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{2}{x}$$

۱۵۳- گزینه ۲ اگر حافظه خوبی داشته باشید، در درس‌نامه ثابت کردیم

طول PQ می‌شود $kb + (1-k)a$ که در این سؤال $a = 9$ ، $b = 12$ و

$$PQ = \frac{1}{3} \times 12 + (1 - \frac{1}{3}) \times 9 = 10$$

اگر هم فرمول یادتان نیست که شروع کنیم:



$$\frac{AP}{PD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{تالس در } \triangle ADE} \frac{AP}{AD} = \frac{x}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow PQ = 9 + x = 9 + 1 = 10$$

۱۵۴- گزینه ۲ راه اول یادمان باشد، کلید حل مسائل تالس در دوزنقه، رسم خط موازی یک ساق از یک سر قاعده کوچک است. مطابق شکل پاره‌خط BE را موازی AD رسم می‌کنیم، در مثل BEC با استفاده از قضیه تالس، داریم:

$$\frac{FQ}{EC} = \frac{BQ}{BC} \Rightarrow \frac{FQ}{EC - FQ} = \frac{BQ}{BC - BQ}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{9-6} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow \frac{BQ}{QC} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{QC}{BQ} = \frac{1}{2}$$

راه دوم (مخصوص آن‌ها که حافظه خوبی دارند!) اگر $k = \frac{BQ}{BC}$ ، آن‌گاه

$$PQ = k \cdot CD + (1-k)AB \Rightarrow 10 = 13k + 4(1-k)$$

$$\Rightarrow 10 = 9k + 4 \Rightarrow k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BQ}{BC - BQ} = \frac{2}{3-2} \Rightarrow \frac{BQ}{CQ} = \frac{2}{1}$$