فهرست

۳۶۶- گزینهٔ ۳ **راه اول** مقسوم را باز می‌کنیم:

$$(x-۲)^۲(x+۲)+x^۳=(x^۲-۴x+۴)(x+۲)+x^۳$$
$$=x^۳+۲x^۲-۴x^۲-۸x+۴x+۸+x^۳=۲x^۳-۲x^۲-۴x+۸$$

حالا تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{۲x^۳} & -\ ۲x^۲ & -\ ۴x & +\ ۸ & x^۲-۴ \\ -\ \cancel{۲x^۳} & & +\ ۸x & & ۲x-۲ \\ \hline & -\ \cancel{۲x^۲} & +\ ۴x & +\ ۸ & \text{خارج‌قسمت} \\ & \cancel{۲x^۲} & & -\ ۸ & \\ \hline & & ۴x & & \end{array}$$

راه دوم با توجه به مقسوم‌علیه مقسوم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x-۲)^۲(x+۲)+x^۳=(x-۲)(x+۲)(x-۲)+x^۳$$
$$=(x^۲-۴)(x-۲)+x^۳$$

حالا تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{rr|l} (x^۲-۴)(x-۲)+x^۳ & & x^۲-۴ \\ -\ (x^۲-۴)(x-۲) & & (x-۲)+x \\ \hline x^۳ & & \text{خارج قسمت} = ۲x-۲ \\ -\ x^۳ & +\ ۴x & \\ \hline & ۴x & \end{array}$$

۳۶۷- گزینهٔ ۲ ریشهٔ مقسوم‌علیه را به دست می‌آوریم:

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

$x=-۱$ را در مقسوم جای‌گذاری می‌کنیم تا باقی‌مانده به دست آید:

$(-۱)^۴-a(-۱)^۳+(-۱)^۲+۲a(-۱)+۱=-a+۳$

باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر ۴ است، پس: $-a+۳=۴ \Rightarrow a=-۱$

۳۶۸- گزینهٔ ۲ اول ریشهٔ مقسوم‌علیه را حساب می‌کنیم:

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

چون $P(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس:

$P(-۲)=۰ \Rightarrow (-۲)^۳-m(-۲)^۲-(-۲)-۴=۰$

$\Rightarrow -۸-۴m+۲-۴=۰ \Rightarrow -۴m=۱۰ \Rightarrow m=-۲/۵$

۳۶۹- گزینهٔ ۴ ریشهٔ $x+۱$ برابر با $x=-۱$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=۲x^۴+mx+۲$ بر $x+۱$ برابر با $P(-۱)$ است، پس:

$P(-۱)=۲ \Rightarrow ۲(-۱)^۴+m(-۱)+۲=۲$

$\Rightarrow -m+۴=۲ \Rightarrow m=۲$

حالا باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x-۱$ را می‌خواهیم.

اول ریشهٔ $x-۱$ را حساب می‌کنیم: $x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۱$ برابر $P(۱)$ است:

$P(x)=۲x^۴+۲x+۲ \Rightarrow P(۱)=۲(۱)^۴+۲(۱)+۲=۶$

۳۷۰- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است، یعنی $P(\frac{۱}{۲})$ باید صفر باشد:

$P(x)=۲x^۴+ax^۳+۲x^۲-۳x$

$$\xrightarrow{P(\frac{۱}{۲})=۰} ۲(\frac{۱}{۲})^۴+a(\frac{۱}{۲})^۳+۲(\frac{۱}{۲})^۲-۳(\frac{۱}{۲})=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}+\frac{a}{۸}+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\times ۸} ۱+a+۴-۱۲=۰ \Rightarrow a=۷$$

باجای‌گذاری $a=۷$، چندجمله‌ای‌به‌صورت $P(x)=۲x^۴+۷x^۳+۲x^۲-۳x$ درمی‌آید.

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x+۲$، کافیست ریشهٔ $x+۲$ یعنی $x=-۲$ را در $P(x)$ قرار دهیم:

$P(-۲)=۲(-۲)^۴+۷(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۳(-۲)$

$=۳۲-۵۶+۸+۶=-۱۰$

۳۷۱- گزینهٔ ۱ ریشهٔ $x+۲$ برابر -۲ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^۵+۴x^۲+۹$ و $P'(x)=ax^۳-x-۱$ بر $x+۲$ برابر است، پس: $P(-۲)=P'(-۲)$

$\Rightarrow (-۲)^۵+۴(-۲)^۲+۹=a(-۲)^۳-(-۲)-۱$

$\Rightarrow -۳۲+۱۶+۹=-۸a+۲-۱$

$\Rightarrow -۷=-۸a+۱ \Rightarrow a=۱$

۳۷۲- گزینهٔ ۱ ریشهٔ $x-۱$ و $x+۲$ به ترتیب ۱ و -۲ است.

◁ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۱$ برابر ۳ شده، پس:

$P(۱)=۳ \Rightarrow ۱^۳+a(۱)^۲+۱-b=۳ \Rightarrow a-b=۱$

◁ $P(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس:

$P(-۲)=۰ \Rightarrow (-۲)^۳+a(-۲)^۲+(-۲)-b=۰ \Rightarrow ۴a-b=۱۰$

اگر دو معادلهٔ $۴a-b=۱۰$ و $a-b=۱$ را حل کنیم، داریم:

$b=۲\ ,\ a=۳$

در نتیجه: $a+b=۳+۲=۵$

۳۷۳- گزینهٔ ۱ باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۴$ برابر ۳ است. پس: $p(۴)=۳ \quad (*)$

باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x+۲$، برابر ۱ است، پس: $p(-۲)=۱ \quad (**)$

حالا باقیماندهٔ تقسیم $T(x)=p(x^۲)+۴p(-x)$ را بر $x-۲$ را می‌یابیم.

برای این کار، باید $T(۲)$ را محاسبه کنیم: $T(۲)=p(۴)+۴p(-۲)$

در نهایت با توجه به تساوی‌های $(*)$ و $(**)$، حاصل را می‌یابیم.

$T(۲)=۳+۴(۱)=۷$

۳۷۴- گزینهٔ ۱ ریشهٔ $x+۱$ و $x-۲$ به ترتیب -۱ و ۲ است.

◁ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۱$ برابر ۵ شده، پس:

$P(-۱)=۵ \Rightarrow ۲(-۱)^{۲n+۱}+a(-۱)^۳+b(-۱)^۲-۱=۵$

$$\xrightarrow[\text{خود ۱− می‌شود}]{\text{۱− به توان فرد}} -۲-a+b-۱=۵ \Rightarrow a-b=-۸$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $T(x)$ بر $x-۲$ برابر با $T(۲)$ است. آن را حساب می‌کنیم:

$$T(x)=ax^۳-۲bx^۲+x-۱$$
$$\Rightarrow T(۲)=a(۲)^۳-۲b(۲)^۲+۲-۱$$
$$=۸a-۸b+۱=۸\underbrace{(a-b)}_{-۸}+۱=-۶۴+۱=-۶۳$$

۳۷۵- گزینهٔ ۳ چون $f(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است، پس:

$$f(۲)=۰ \Rightarrow ۲^۳+a(۲)^۲-۵(۲)-۶=۰$$
$$\Rightarrow ۸+۴a-۱۰-۶=۰ \Rightarrow a=۲$$

با جای‌گذاری $a=۲$، تابع $f(x)$ را بر $x-۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^۳ & +۲x^۲ & -۵x & -۶ & x-۲ \\ \cline{5-5}
-x^۳ & +۲x^۲ & & & x^۲+۴x+۳ \\ \cline{1-4}
 & ۴x^۲ & -۵x & -۶ & \\
 & -۴x^۲ & +۸x & & \\ \cline{1-4}
 & & ۳x & -۶ & \\
 & & -۳x & +۶ & \\ \cline{1-4}
 & & & ۰ &
\end{array}$$

پس f را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=(x-۲)(x^۲+۴x+۳)=(x-۲)(x+۱)(x+۳)$$

ریشه‌های تابع f برابر با ۲، ۱− و ۳− هستند که جمعشان ۲− می‌شود.

۳۷۶- گزینهٔ ۴ چون $f(x)=x^۴+ax^۳-۸x$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس $f(-۲)$ باید صفر باشد:

$$f(-۲)=۰ \Rightarrow (-۲)^۴+a(-۲)^۳-۸(-۲)=۰$$
$$\Rightarrow ۱۶-۸a+۱۶=۰ \Rightarrow ۸a=۳۲ \Rightarrow a=۴$$

حالا با جای‌گذاری $a=۴$، $f(x)$ را بر $x+۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^۴ & +۴x^۳ & & -۸x & x+۲ \\ \cline{5-5}
-x^۴ & -۲x^۳ & & & x^۳+۲x^۲-۴x \\ \cline{1-4}
 & ۲x^۳ & & -۸x & \\
 & -۲x^۳ & -۴x^۲ & & \\ \cline{1-4}
 & & -۴x^۲ & -۸x & \\
 & & ۴x^۲ & +۸x & \\ \cline{1-4}
 & & & ۰ &
\end{array}$$

پس $f(x)$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x)=(x+۲)(\underbrace{x^۳+۲x^۲-۴x}_{\text{فاکتور از } x})=x(x+۲)(x^۲+۲x-۴)$$

ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۴=۰$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۲^۲-۴(۱)(-۴)=۲۰$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲\pm۲\sqrt{۵}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۵}$$

پس ریشه‌های f عبارت‌اند از صفر، ۲−، $-۱+\sqrt{۵}$ و $-۱-\sqrt{۵}$ که کوچک‌ترین آن‌ها $-۱-\sqrt{۵}$ است.

۳۷۷- گزینهٔ ۲ رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^۳+۴x^۲+bx+۳=(x^۲+ax-۱)(x+۲)+۳x+۵ \Rightarrow$$
$$\cancel{x^۳}+۴x^۲+bx+۳=\cancel{x^۳}+۲x^۲+ax^۲+۲ax-x-۲+۳x+۵$$
$$\Rightarrow ۴x^۲+bx+۳=(۲+a)x^۲+(۲a+۲)x+۳$$

برای آن‌که عبارت سمت راست و چپ متحد باشند باید ضرایب عبارت‌های هم‌درجه برابر باشند، پس:

$$۴x^۲+bx+۳=(۲+a)x^۲+(۲a+۲)x+۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴=۲+a \\ b=۲a+۲ \end{cases} \Rightarrow a=۲ \;,\; b=۶ \Rightarrow a+b=۸$$

۳۷۸- گزینهٔ ۳ در تقسیم $x^{۱۵}+x^۷+۳x^۲-x-۱$ بر $x^۵-۴x-۳$، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را به ترتیب $Q(x)$ و $R(x)$ می‌گیریم، پس داریم:

$$x^{۱۵}+x^۷+۳x^۲-x-۱=(x^۵-۴x-۳)Q(x)+R(x)$$

در رابطهٔ تقسیم بالا، $x=-۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(-۱)^{۱۵}+(-۱)^۷+۳(-۱)^۲-(-۱)-۱$$
$$=((-۱)^۵-۴(-۱)-۳)Q(-۱)+R(-۱)$$
$$\Rightarrow -۱-۱+۳+۱-۱=(\underbrace{-۱+۴-۳}_{۰})Q(-۱)+R(-۱)$$
$$\Rightarrow ۱=R(-۱)$$

۳۷۹- گزینهٔ ۲ **راه اول** عبارت $P(x)=x^۴+۴ax^۲+۲bx+۱$ بر $x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)$ بخش‌پذیر است، پس $P(x)$ بر $x-۲$ و $x+۲$ بخش‌پذیر است و در نتیجه باید $P(۲)$ و $P(-۲)$ صفر باشند:

$$P(۲)=۰ \Rightarrow ۲^۴+۴a(۲)^۲+۲b(۲)+۱=۰$$
$$\Rightarrow ۱۶+۱۶a+۴b+۱=۰ \Rightarrow ۱۶a+۴b=-۱۷$$
$$P(-۲)=۰ \Rightarrow (-۲)^۴+۴a(-۲)^۲+۲b(-۲)+۱=۰$$
$$\Rightarrow ۱۶+۱۶a-۴b+۱=۰ \Rightarrow ۱۶a-۴b=-۱۷$$

با حل دو معادلهٔ بالا داریم: $b=۰, a=\frac{-۱۷}{۱۶}$

پس: $a+b=\frac{-۱۷}{۱۶}+۰=\frac{-۱۷}{۱۶}$

راه دوم از $x^۲-۴=۰$ نتیجه می‌گیریم: $x^۲=۴$

حالا $P(x)$ را برحسب $x^۲$ می‌نویسیم، به جای $x^۲$ها، عدد ۴ و عبارت به دست آمده را متحد با صفر قرار می‌دهیم:

$$P(x)=(x^۲)^۲+۴ax^۲+۲bx+۱=۴^۲+۴a(۴)+۲bx+۱$$
$$=۲bx+۱۶a+۱۷$$

اگر عبارت به دست آمده را متحد با صفر قرار دهیم، باید ضریب x (یعنی $۲b$) و عبارت درجه صفر (یعنی $۱۶a+۱۷$) صفر شوند:

$$\underbrace{۲b}_{۰}x+\underbrace{۱۶a+۱۷}_{۰}\overset{\text{متحد}}{=}۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲b=۰ \Rightarrow b=۰ \\ ۱۶a+۱۷=۰ \Rightarrow a=\frac{-۱۷}{۱۶} \end{cases}$$

۳۸۰- گزینهٔ ۴ **راه اول** در تقسیم $ax^۶+bx^۳+۱$ بر $x^۳+۱$، خارج‌قسمت $Q(x)$ و باقی‌مانده ۱ شده است، رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$ax^۶+bx^۳+۱=(x^۳+۱)Q(x)+۱$$

در رابطهٔ بالا جای x، عدد ۱− قرار می‌دهیم:

$$a(-۱)^۶+b(-۱)^۳+۱=((-۱)^۳+۱)Q(-۱)+۱$$
$$\Rightarrow a-b+۱=۱ \Rightarrow a-b=۰$$

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ $P(x)=x^۲+ax+۲b$ بر $x+۲$ باید مقدار $P(-۲)$ را حساب کنیم:

$$P(-۲)=(-۲)^۲+a(-۲)+۲b=۴-۲a+۲b$$
$$=۴-۲(a-b)\xrightarrow{a-b=۰}P(-۲)=۴-۲(۰)=۴$$

راه دوم برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم بر x^3+1، مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم $x^3=-1$.

حالا در مقسوم به جای x^3 ها، عدد -1 می‌گذاریم تا باقی‌مانده به دست آید:

$$ax^6+bx^3+1=a(x^3)^2+bx^3+1$$
$$\xrightarrow{x^3=-1} a(-1)^2+b(-1)+1=a-b+1$$

طبق صورت سؤال، باقی‌ماندهٔ تقسیم بر x^3+1 برابر ۱ شده است، پس:

$$a-b+1=1 \Rightarrow a-b=0$$

ادامهٔ حل مثل راه‌حل اول است.

۳۸۱- گزینهٔ ۱ چون $P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، پس $P(-2)$ باید صفر شود: $P(-2)=0$

$$\Rightarrow (-2)^{2n+1}+2\underbrace{(-2)^{2n}}_{2^{2n}}+(-2)^5-5(-2)^3+k=0$$
$$\Rightarrow -\cancel{2^{2n+1}}+\cancel{2^{2n+1}}-32+40+k=0 \Rightarrow 8+k=0$$
$$\Rightarrow k=-8$$

حالا باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر x^2-1 را می‌خواهیم. از $x^2-1=0$ نتیجه می‌گیریم $x^2=1$، پس برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر x^2-1، به جای x^2 ها عدد ۱ می‌گذاریم:

$$P(x)=x(x^2)^n+2(x^2)^n+(x^2)^2x-5x^2x-8$$
$$\xrightarrow{x^2=1} x(1)^n+2(1)^n+(1)^2x-5(1)x-8$$
$$=x+2+x-5x-8=-3x-6$$

۳۸۲- گزینهٔ ۴ مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$$

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2+1، در $f(x)$ جای x^2 ها عدد -1 می‌گذاریم: $f(x)=x^3+ax^2-bx=x^2x+ax^2-bx$

$$\xrightarrow{x^2=-1}(-1)x+a(-1)-bx=-x-a-bx=(-b-1)x-a$$

سؤال گفته باقی‌مانده برابر ۵ است، پس عبارت $(-b-1)x-a$ باید متحد با ۵ باشد و داریم:

$$\underbrace{(-b-1)}_{0}x\underbrace{-a}_{5} \overset{\text{متحد}}{=} 5 \Rightarrow \begin{cases}-b-1=0 \Rightarrow b=-1\\ -a=5 \Rightarrow a=-5\end{cases}$$

در نتیجه: $a-b=-5-(-1)=-4$

۳۸۳- گزینهٔ ۳

راه اول ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^3-5x^2+2x+1$ را بر x^2+1 حساب می‌کنیم.

اگر مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهیم، داریم $x^2=-1$، پس در $P(x)$ به جای x^2 ها -1 می‌گذاریم: $P(x)=x^2x-5x^2+2x+1$

$$\xrightarrow{x^2=-1}(-1)x-5(-1)+2x+1=-x+5+2x+1=x+6$$

پس باقی‌مانده، $x+6$ است، بنابراین اگر $x+6$ را از $P(x)$ کم کنیم باقی‌ماندهٔ تقسیم، صفر می‌شود.

راه دوم $(x+1)^3(x-1)^2$ بر (x^2-1) بخش‌پذیر است.

بنابراین کافی است باقی‌ماندهٔ x^4-x^2-1 را بر x^2-1 را محاسبه کنیم:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow (x^2)^2-x^2-1$$
$$\overset{x^n=1}{=\!=}(1)^2-1-1=\underbrace{1-1}_{0}-1=-1$$

۳۸۴- گزینهٔ ۳ اگر مقسوم را مساوی صفر قرار دهیم، داریم: $x^2=1$

پس در $f(x)$ به جای x^2 ها، ۱ می‌گذاریم. فقط اول مقسوم را برحسب x^2 مرتب می‌کنیم: $f(x)=(x+1)^3(x-1)^2+x^4-x^2-1$

$$=(x+1)(x+1)^2(x-1)^2+x^4-x^2-1$$
$$=(x+1)(x^2-1)^2+(x^2)^2-x^2-1$$
$$\xrightarrow{x^2=1}(x+1)(1-1)^2+(1)^2-1-1=0+1-1-1=-1$$

۳۸۵- گزینهٔ ۲ اگر مقسوم را مساوی صفر بگذاریم، نتیجه می‌گیریم:

$$x^2+3x=0 \Rightarrow x^2=-3x$$

پس برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2+3x، در $f(x)$ به جای x^2 ها، $-3x$ می‌گذاریم. *البته قبلش قیافهٔ $f(x)$ را باید کمی درست کنیم:*

$$f(x)=\underline{x(x+3)}\,\underline{(x+1)(x+2)}+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$
$$\xrightarrow{x^2=-3x}(-3x+3x)(-3x+3x+2)+1=0+1=1$$

۳۸۶- گزینهٔ ۳ اگر مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار دهیم، داریم:

$$x^4+4x^2-1=0 \Rightarrow x^4=-4x^2+1$$

پس مقسوم را طوری مرتب می‌کنیم که بتوانیم از تساوی بالا استفاده کنیم:

$$\underbrace{(x^2+1)(x^2+4)}\underbrace{(x^2+2)(x^2+3)}+x^2$$
$$=(x^4+5x^2+4)(x^4+5x^2+6)+x^2$$
$$\xrightarrow{x^4=-4x^2+1}(-4x^2+1+5x^2+4)(-4x^2+1+5x^2+6)+x^2$$
$$=(x^2+5)(x^2+7)+x^2=x^4+12x^2+35+x^2=x^4+13x^2+35$$
$$\xrightarrow{x^4=1-4x^2}1-4x^2+13x^2+35=9x^2+36$$

۳۸۷- گزینهٔ ۴ مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2=-x-1$$

برای محاسبهٔ باقی‌مانده، باید در مقسوم به جای x^2 ها، $-x-1$ قرار دهیم و اگر لازم شد این کار را تکرار می‌کنیم:

$$(x^2+6x+8)(x^2-4x+3)+3\xrightarrow{x^2=-x-1}$$
$$(-x-1+6x+8)(-x-1-4x+3)+3=(5x+7)(-5x+2)+3$$
$$=-25\underset{\substack{\downarrow\\ -x-1}}{x^2}+10x-35x+14+3$$
$$=-25(-x-1)-25x+17=25x+25-25x+17=42$$

۳۸۸- گزینهٔ ۴ اگر مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهیم، داریم:

$$x^3-x=0 \Rightarrow x^3=x$$

برای به دست آوردن باقی‌مانده، باید در مقسوم به جای x^3 ها، x قرار دهیم:

$$4x^{21}-3x^{12}+2x^2+x=4(x^3)^7-3(x^3)^4+2x^2+x$$
$$\xrightarrow{x^3=x}4x^7-3x^4+2x^2+x$$
$$=4(x^3)^2x-3(x^3)x+2x^2+x$$
$$\xrightarrow{x^3=x}4x^2x-3xx+2x^2+x=4x^3-x^2+x$$
$$\xrightarrow{x^3=x}4x-x^2+x=-x^2+5x$$

پس باقی‌مانده به صورت $R(x)=-x^2+5x$ است و مقدار $R(2)$ برابر است با: $R(2)=-(2)^2+5(2)=-4+10=6$

۳۸۹- گزینهٔ ۴ مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x^2=2x-1$$

برای به دست آوردن باقی‌مانده، باید در مقسوم به جای x^2 ها، $2x-1$ بگذاریم:

$$x^4+ax^2-bx+4=(x^2)^2+ax^2-bx+4$$

$$\xrightarrow{x^2=2x-1}(2x-1)^2+a(2x-1)-bx+4$$

$$=4x^2-4x+1+2ax-a-bx+4$$

$$\xrightarrow{x^2=2x-1} 4(2x-1)-4x+1+2ax-a-bx+4$$

$$=8x-4-4x+1+2ax-a-bx+4$$

$$=(2a-b+4)x+1-a$$

به خاطر بخش‌پذیربودن، باقی‌مانده باید صفر شود، پس عبارت به دست آمده متحد با صفر است:

$$(\underbrace{2a-b+4}_{0})x+(\underbrace{1-a}_{0}) \overset{\text{متحد}}{=} 0 \Rightarrow \begin{cases}1-a=0\\ 2a-b+4=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=1\ ,\ b=6$$

۳۹۰- گزینهٔ ۲ چندجمله‌ای درجه‌سوم $a(x-1)(x+1)(x-2)$ بر $x-1$، $x+1$ و $x-2$ بخش‌پذیر است. پس اگر به این چندجمله‌ای درجهٔ سه، ۲۴ واحد اضافه کنیم، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$، $x+1$ و $x-2$ برابر ۲۴ می‌شود. پس:

$$f(x)=a(x-1)(x+1)(x-2)+24$$

حالا شرط آخر را روی آن اعمال می‌کنیم. باید $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد، پس $f(-2)$ باید صفر شود:

$$f(-2)=0 \Rightarrow a(-2-1)(-2+1)(-2-2)+24=0$$

$$\Rightarrow -12a+24=0 \Rightarrow a=2$$

پس $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x)=2(x-1)(x+1)(x-2)+24=2x^3+\cdots$$

ضریب x^3 برابر ۲ است.

۳۹۱- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $f(x)$ را بر x^2-4 تقسیم کرده‌ایم. خارج‌قسمت $Q(x)$ و باقی‌مانده $2x-1$ شده است. بنابراین رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است:

$$f(x)=(x^2-4)Q(x)+2x-1$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ و $x+2$ به ترتیب برابر $f(2)$ و $f(-2)$ است.

$$f(2)=(2^2-4)Q(2)+2(2)-1=3 \Rightarrow A=3$$

$$f(-2)=((-2)^2-4)Q(-2)+2(-2)-1=-5 \Rightarrow B=-5$$

پس: $A-B=3-(-5)=8$

۳۹۲- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-2، حداکثر از درجهٔ یک است. آن را $ax+b$ در نظر می‌گیریم. رابطهٔ تقسیم به صورت مقابل درمی‌آید:

$$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$$

$$\Rightarrow P(x)=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$$

◁ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر -2 شده است، پس:

$$P(1)=-2 \Rightarrow 0+a+b=-2 \Rightarrow a+b=-2$$

◁ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر ۴ شده است، پس:

$$P(-2)=4 \Rightarrow 0-2a+b=4 \Rightarrow -2a+b=4$$

با حل دو معادلهٔ $a+b=-2$ و $-2a+b=4$ داریم: $b=0\ ,\ a=-2$

پس $ax+b$ که باقی‌ماندهٔ تقسیم بود برابر با $-2x$ است.

۳۹۳- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-2$ برابر ۱ است؛ پس $P(2)=1$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+3$ برابر -4 است، پس $P(-3)=-4$.

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-6، ابتدا رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم (چون مقسوم‌علیه از درجهٔ دوم است، باقی‌ماندهٔ تقسیم را به صورت $ax+b$ در نظر می‌گیریم):

$$P(x)=(x^2+x-6)Q(x)+ax+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases}P(2)=1 \Rightarrow 0\times Q(2)+2a+b=1\\ P(-3)=-4 \Rightarrow 0\times Q(-3)-3a+b=-4\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2a+b=1\\ -3a+b=-4\end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5a=5 \Rightarrow a=1$$

$\xrightarrow{2a+b=1} b=-1 \Rightarrow$ باقی‌مانده: $ax+b=x-1$

۳۹۴- گزینهٔ ۳ باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۸ است، پس:

$$P(1)=8$$

باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x+1$، برابر ۵ است، پس: $P(-\frac{1}{2})=5$

حالا فرض کنیم باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ برابر $ax+b$ باشد، در این صورت با توجه به رابطهٔ تقسیم داریم:

$$P(x)=(2x^2-x-1)Q(x)+ax+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases}P(1)=0+a+b \Rightarrow 8=a+b\\ P(-\frac{1}{2})=0+(-\frac{1}{2}a+b) \Rightarrow 5=-\frac{1}{2}a+b\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 3=\frac{3}{2}a \Rightarrow a=2 \xrightarrow{8=a+b} b=6$$

بنابراین باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ برابر $2x+6$ است.

۳۹۵- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x+b$ به ترتیب ۳ و ۷ شده، پس: $f(-b)=7\ ,\ f(1)=3$

از طرفی باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x+b)(x-1)$ برابر با $-x+a$ است، پس رابطهٔ تقسیم به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(x)=(x+b)(x-1)Q(x)+(-x+a)$$

حالا دو شرط $f(1)=3$ و $f(-b)=7$ را می‌نویسیم:

$$f(1)=3 \Rightarrow (1+b)(0)Q(1)+(-1+a)=3$$

$$\Rightarrow a-1=3 \Rightarrow a=4$$

$$f(-b)=7 \Rightarrow (-b+b)(-b-1)Q(-b)+(b+a)=7$$

$$\Rightarrow 0+b+a=7 \xrightarrow{a=4} b=3$$

پس: $a-b=4-3=1$

۳۹۶- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x(x-3)(x+3)$ برابر $5x^2+3x+1$ است. رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x)=x(x-3)(x+3)Q(x)+5x^2+3x+1$$

$$=(x^2-3x)(x+3)Q(x)+5x^2+3x+1$$

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2-3x، باید در $f(x)$ جای x^2 ها، $3x$ قرار دهیم: $(x^2-3x)(x+3)Q(x)+5x^2+3x+1$

$$\xrightarrow{x^2=3x} 0+5(3x)+3x+1=18x+1$$

پس $a=18$، $b=1$ و در نتیجه: $2a+b=2(18)+1=37$

۳۹۷- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2-4 برابر با $3x+12$ شده است. رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x)=(x^2-4)Q(x)+3x+12 \quad (I)$$

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $2f(x+1)-1$ بر $x+3$ باید به جای x، عدد ۳- بگذاریم: $2f(-3+1)-1=2f(-2)-1$

پس $f(-2)$ را می‌خواهیم. با استفاده از رابطهٔ (I) آن را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=(x^2-4)Q(x)+3x+12$$

$$\xrightarrow{x=-2} f(-2)=0+3(-2)+12=6$$

در نتیجه: $2f(-2)-1=2(6)-1=11$

۳۹۸- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2-4 برابر با $3x+1$ شده، پس: $f(x)=(x^2-4)Q(x)+3x+1 \quad (I)$

ما باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x^3-x-2)$ بر $x+1$ را می‌خواهیم. باید به جای xها عدد ۱- بگذاریم:

$$f(x^3-x-2) \xrightarrow{x=-1} f(-1+1-2)=f(-2)$$

مقدار $f(-2)$ را با استفاده از رابطهٔ (I) حساب می‌کنیم:

$$f(x)=(x^2-4)Q(x)+3x+1$$

$$\xrightarrow{x=-2} f(-2)=0+3(-2)+1=-5$$

۳۹۹- گزینهٔ ۲ برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ عبارت $p(x-1)-p(x-2)$ بر x، $x=0$ قرار می‌دهیم: $x=0:$ باقی‌مانده $=p(-1)-p(-2) \quad (*)$

حالا باید با استفاده از اطلاعات مسئله $p(-1)$ و $p(-2)$ را محاسبه کنیم.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر x^2+3x+2 برابر $2x+1$ است. پس رابطهٔ تقسیم به صورت روبه‌رو است: $p(x)=(x^2+3x+2)Q(x)+2x+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(-1)=0+(-1)=-1 \\ p(-2)=0+(-3)=-3 \end{cases}$$

در نتیجه: $\xrightarrow{(*)}$ باقی‌مانده $=-1-(-3)=2$

۴۰۰- گزینهٔ ۲ چندجمله‌ای $g(x)=x+f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ بخش‌پذیر است، پس:

▷ $g(1)=0 \Rightarrow 1+f(1)=0 \Rightarrow f(1)=-1$

▷ $g(2)=0 \Rightarrow 2+f(2)=0 \Rightarrow f(2)=-2$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $xf(x)$ بر x^2-3x+2 یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ یک است. آن را $ax+b$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$xf(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$$

در تساوی بالا یک بار $x=1$ و یک بار $x=2$ قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{x=1} 1f(1)=0+a+b \xrightarrow{f(1)=-1} a+b=-1$$

$$\xrightarrow{x=2} 2f(2)=0+2a+b \xrightarrow{f(2)=-2} 2a+b=-4$$

با حل دو معادلهٔ بالا داریم: $b=2\,,\ a=-3$

پس باقی‌مانده به صورت $-3x+2$ است.

۴۰۱- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ برابر ۲ است پس:

$$p(1)=2 \Rightarrow 1-3+a-1=2 \Rightarrow a=5$$

حالا رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم: $x^7-3x^4+5x-1=(x-1)q(x)+2$

برای محاسبهٔ $q(-1)$، در تساوی بالا $x=-1$ قرار می‌دهیم:

$$-1-3-5-1=(-1-1)q(-1)+2 \Rightarrow -2q(-1)=-12$$

$$\Rightarrow q(-1)=6$$

۴۰۲- گزینهٔ ۳ در تقسیم $P(x)=5x^5-14x^3+3$ بر $x-2$، ابتدا باقی‌مانده را حساب می‌کنیم:

$$P(2)=5(2)^5-14(2)^3+3=160-112+3=51$$

با داشتن باقی‌مانده رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$5x^5-14x^3+3=(x-2)Q(x)+51$$

در رابطهٔ بالا $x=-2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$5(-2)^5-14(-2)^3+3=(-2-2)Q(-2)+51$$

$$\Rightarrow -160+112+3=-4Q(-2)+51$$

$$\Rightarrow -96=-4Q(-2) \Rightarrow Q(-2)=24$$

۴۰۳- گزینهٔ ۳ ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^8+3x^5-2x^2+1$ بر $x+1$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-1)=(-1)^8+3(-1)^5-2(-1)^2+1=1-3-2+1=-3$$

پس رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است:

$$x^8+3x^5-2x^2+1=(x+1)Q(x)+(-3)$$

اگر یادتان باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $P(x)$ برابر با $P(1)$ بود، بنابراین مجموع ضرایب خارج‌قسمت $Q(1)$ می‌شود. در تساوی بالا $x=1$ را جای‌گذاری می‌کنیم: $1^8+3(1)^5-2(1)^2+1=(1+1)Q(1)+(-3)$

$$\Rightarrow 1+3-2+1=2Q(1)-3 \Rightarrow 2Q(1)=6 \Rightarrow Q(1)=3$$

۴۰۴- گزینهٔ ۴ ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=3x^{14}-x^{10}+x^7+6$ بر $x+1$ حساب می‌کنیم:

$$f(-1)=3(-1)^{14}-(-1)^{10}+(-1)^7+6=3-1-1+6=7$$

با فرض این‌که خارج‌قسمت این تقسیم $g(x)$ باشد، رابطهٔ تقسیم به شکل مقابل درمی‌آید: $3x^{14}-x^{10}+x^7+6=(x+1)g(x)+7$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)$ بر $x-1$ برابر با $g(1)$ است. برای به دست آوردن $g(1)$، در رابطهٔ بالا، $x=1$ را قرار می‌دهیم:

$$3(1)^{14}-1^{10}+1^7+6=(1+1)g(1)+7$$

$$\Rightarrow 3-1+1+6=2g(1)+7 \Rightarrow 2g(1)=2 \Rightarrow g(1)=1$$

۴۰۵- گزینهٔ ۴

راه اول با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ داریم:

$$x^{24}+1=(x^8)^3+1^3=(x^8+1)(x^{16}-x^8+1)$$

پس $x^{24}+1$ بر x^8+1 بخش‌پذیر است.

راه دوم تک‌تک گزینه‌ها را چک می‌کنیم. هر گزینه نقش مقسوم‌علیه را دارد. آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم و تساوی به دست آمده را در مقسوم یعنی $x^{24}+1$ جای‌گذاری می‌کنیم. اگر حاصل صفر شد یعنی $x^{24}+1$ بر آن گزینه بخش‌پذیر است.

(۱) $x^{12}+1=0 \Rightarrow x^{12}=-1$

$x^{24}+1=(x^{12})^2+1=(-1)^2+1=2$ ✗

(۲) $x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$

$x^{24}+1=(x^3)^8+1=(-1)^8+1=2$ ✗

(۳) $x^6+1=0 \Rightarrow x^6=-1$

$x^{24}+1=(x^6)^4+1=(-1)^4+1=2$ ✗

(۴) $x^8+1=0 \Rightarrow x^8=-1$

$x^{24}+1=(x^8)^3+1=(-1)^3+1=0$ ✓

۴۰۶- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد

$$x^7+y^7=(x+y)(x^6-x^5y+\cdots-xy^5+y^6)$$

داریم: $a^{28}+b^{42}=(a^4)^7+(b^6)^7=(a^4+b^6)(a^{24}-\cdots+b^{36})$

پس $a^{28}+b^{42}$ بر a^4+b^6 بخش‌پذیر است.

۴۰۷- گزینهٔ ۳

$$A=\frac{(x^{۴}-۱)(x+۲)}{x^{۲}+x-۲}=\frac{\cancel{(x-۱)}(x^{۳}+x^{۲}+x+۱)\cancel{(x+۲)}}{\cancel{(x+۲)}\,\cancel{(x-۱)}}$$

$$=x^{۳}+x^{۲}+x+۱$$

۴۰۸- گزینهٔ ۱ صورت کسر را با اتحاد (n فرد)

$$(a+b)(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱})=a^{n}+b^{n}$$

ساده می‌کنیم و مخرج را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(۱+t)(۱-t+t^{۲}-t^{۳}+t^{۴})}{۱-t^{۱۰}}=\frac{۱+t^{۵}}{(۱-t^{۵})(۱+t^{۵})}$$

$$=\frac{۱}{۱-t^{۵}}\xrightarrow{t=\sqrt[۵]{۲}}\frac{۱}{۱-(\sqrt[۵]{۲})^{۵}}=\frac{۱}{۱-۲}=-۱$$
