

شماره صفحه

شماره پاسخ

۷	۱	درس ۱: قدرمطلق
۹	۱۷	درس ۲: جزء صحیح
۱۲	۵۲	درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه
۱۶	۹۰	درس ۲: مفهوم دامنه و برد - تعیین دامنه
۲۳	۱۵۰	درس ۳: انواع تابع
۲۹	۲۰۳	درس ۴: انتقال نمودارها
۳۷	۲۴۶	درس ۵: معرفی توابع چندجمله‌ای و بررسی $x^3$
۴۱	۲۶۸	درس ۶: اعمال جبری روی توابع
۴۴	۲۹۵	درس ۷: ترکیب توابع
۵۳	۳۶۵	درس ۸: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)
۵۸	۴۰۶	درس ۹: تابع یک‌به‌یک
۶۰	۴۲۴	درس ۱۰: وارون تابع و تابع وارون
۷۰	۵۰۲	درس ۱۱: تعیین برد تابع
۷۷	۵۵۱	درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه و رادیان)
۷۹	۵۶۵	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه
۸۳	۶۰۱	درس ۳: دایره مثلثاتی و علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های چهارگانه
۸۷	۶۳۵	درس ۴: اتحادهای اولیه
۹۱	۶۶۶	درس ۵: زاویه‌های ترکیبی
۹۴	۶۸۹	درس ۶: کمان‌های $2\alpha$
۱۰۰	۷۳۹	درس ۷: تابع متناوب
۱۰۲	۷۶۰	درس ۸: رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس
۱۰۶	۸۰۱	درس ۹: تانژانت
۱۱۰	۸۳۰	درس ۱۰: معادله مثلثاتی
۱۲۰	۸۹۳	درس ۱: تقسیم چندجمله‌ای‌ها
۱۲۱	۹۱۰	درس ۲: همسایگی
۱۲۳	۹۲۳	درس ۳: فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد
۱۲۹	۹۷۸	درس ۴: رفع ابهام صفرصفرم ( $\frac{0}{0}$ )
۱۳۹	۱۰۵۰	درس ۵: حد بی‌نهایت
۱۴۳	۱۰۸۴	درس ۶: حد در بی‌نهایت
۱۴۸	۱۱۳۴	درس ۷: پیوستگی
۱۵۷	۱۱۹۷	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۱۶۰	۱۲۳۰	درس ۲: قواعد مشتق‌گیری
۱۶۶	۱۲۹۱	درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده‌کردن)
۱۷۰	۱۳۳۱	درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی
۱۷۲	۱۳۴۹	درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق
۱۷۷	۱۳۸۶	درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه)

## فصل صفر قدرمطلق و جزء صحیح

## فصل اول تابع

فصل ۵ ریاضی دهم  
فصل ۳ ریاضی یازدهم  
فصل ۱ ریاضی دوازدهم

## فصل دوم مثلثات

فصل ۲ ریاضی دهم  
فصل ۴ ریاضی یازدهم  
فصل ۲ ریاضی دوازدهم

## فصل سوم حد و پیوستگی

فصل ۶ ریاضی یازدهم  
فصل ۳ ریاضی دوازدهم

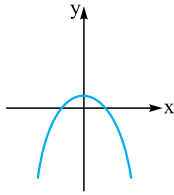
## فصل چهارم مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

۱۷۹	۱۳۹۹	درس ۷: نقاط مشتق ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم	<b>فصل چهارم</b> <b>مشتق</b> فصل ۴ ریاضی دوازدهم
۱۸۴	۱۴۴۸	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق	
۱۸۶	۱۴۶۶	درس ۹: مشتق تابع مرکب	
۱۹۰	۱۴۹۹	درس ۱۰: آهنگ تغییر	
۱۹۴	۱۵۳۷	درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق	<b>فصل پنجم</b> <b>کاربرد مشتق</b> فصل ۵ ریاضی دوازدهم
۱۹۷	۱۵۶۳	درس ۲: اکسترمم‌های نسبی	
۲۰۳	۱۶۰۰	درس ۳: نقطه بحرانی	
۲۰۸	۱۶۳۰	درس ۴: اکسترمم‌های مطلق	
۲۱۲	۱۶۵۶	درس ۵: بهینه‌سازی	
۲۱۹	۱۷۰۵	درس ۱: تفکر تجسمی	<b>فصل ششم</b> <b>هندسه (تفکر تجسمی و ...)</b> فصل ۶ ریاضی دوازدهم
۲۲۴	۱۷۴۸	درس ۲: بیضی	
۲۲۹	۱۷۸۸	درس ۳: دایره	
۲۳۹	۱۸۶۳	درس ۱: فضای نمونه‌ای و پیشامد	<b>فصل هفتم</b> <b>احتمال</b> فصل ۷ ریاضی دهم فصل ۷ ریاضی یازدهم فصل ۷ ریاضی دوازدهم
۲۴۰	۱۸۸۲	درس ۲: احتمال رخداد یا پیشامد	
۲۴۶	۱۹۴۲	درس ۳: قوانین احتمال	
۲۴۹	۱۹۶۶	درس ۴: احتمال شرطی	
۲۵۲	۲۰۰۱	درس ۵: پیشامدهای مستقل	
۲۵۶	۲۰۴۳	درس ۶: قانون احتمال کل	
۲۶۰	۲۰۸۳	درس ۱: معادله درجه دوم	<b>فصل هشتم</b> <b>معادله درجه دوم و سهمی</b> فصل ۴ ریاضی دهم فصل ۱ ریاضی یازدهم
۲۷۲	۲۱۸۱	درس ۲: سهمی	
۲۸۲	۲۲۴۸	درس ۱: معادلات گویا	<b>فصل نهم</b> <b>معادله، نامعادله و تعیین علامت</b> فصل ۱ ریاضی یازدهم
۲۸۵	۲۲۶۵	درس ۲: معادلات رادیکالی	
۲۸۸	۲۲۸۷	درس ۳: تعیین علامت	
۲۹۳	۲۳۲۴	درس ۴: معادلات قدرمطلق	
۲۹۸	۲۳۵۷	درس ۱: یادآوری و تکمیل معادله خط	<b>فصل دهم</b> <b>هندسه تحلیلی</b> فصل ۱ ریاضی یازدهم
۳۰۹	۲۴۵۲	درس ۱: تابع نمایی	
۳۱۵	۲۴۹۴	درس ۲: تابع لگاریتمی	<b>فصل یازدهم</b> <b>توابع نمایی و لگاریتمی</b> فصل ۵ ریاضی یازدهم
۳۱۸	۲۵۲۳	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم	
۳۲۱	۲۵۶۰	درس ۴: معادلات لگاریتمی	
۳۲۴	۲۵۸۵	درس ۵: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی	

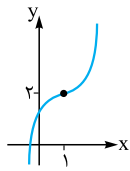
۳۲۶	۲۶۰۳	درس ۱: توان و ریشه	<b>فصل دوازدهم</b> <b>توان‌های گویا و عبارات‌های جبری</b> <b>فصل ۳ ریاضی دهم</b>
۳۲۷	۲۶۲۱	درس ۲: رادیکال و توان‌های گویا	
۳۲۹	۲۶۳۷	درس ۳: اتحادها	
۳۳۳	۲۶۷۶	درس ۴: گویاکردن مخرج کسرها	
۳۳۶	۲۷۰۰	درس ۱: مجموعه‌های اعداد، بازه، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	<b>فصل سیزدهم</b> <b>مجموعه و بازه</b> <b>فصل ۱ ریاضی دهم</b>
۳۳۸	۲۷۲۴	درس ۲: مجموعه مرجع و متمم	
۳۴۰	۲۷۳۷	درس ۳: تعداد اعضای مجموعه	
۳۴۲	۲۷۵۹	درس ۱: الگوهای هندسی	<b>فصل چهاردهم</b> <b>الگو و دنباله</b> <b>فصل ۱ ریاضی دهم</b>
۳۴۷	۲۸۰۳	درس ۲: دنباله حسابی	
۳۵۰	۲۸۴۲	درس ۳: دنباله هندسی	
۳۵۵	۲۸۹۰	درس ۱: شمارش	<b>فصل پانزدهم</b> <b>شمارش، بدون شمردن</b> <b>فصل ۶ ریاضی دهم</b>
۳۵۸	۲۹۳۰	درس ۲: جایگشت	
۳۶۰	۲۹۶۵	درس ۳: ترکیب	
۳۶۵	۳۰۲۰	درس ۴: جایگشت با حضور اشیای تکراری	
۳۶۷	۳۰۴۵	درس ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار	<b>فصل شانزدهم</b> <b>آمار</b> <b>فصل ۷ ریاضی دهم</b> <b>فصل ۷ ریاضی یازدهم</b>
۳۶۷	۳۰۵۴	درس ۲: شاخص‌های مرکزی	
۳۷۰	۳۰۸۲	درس ۳: شاخص‌های پراکندگی	
۳۷۶	۳۱۴۸	درس ۱: ترسیم‌های هندسی	<b>فصل هفدهم</b> <b>هندسه</b> <b>فصل ۲ ریاضی یازدهم</b>
۳۸۰	۳۱۷۷	درس ۲: استدلال	
۳۸۱	۳۱۸۷	درس ۳: نسبت و تناسب - قضیه تالس	
۳۸۵	۳۲۲۷	درس ۴: تشابه مثلث‌ها	
۳۸۷	۳۲۴۵	درس ۵: نسبت مساحت‌ها	
۳۹۲	۳۲۷۵	درس ۶: روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه	

۴۰۸. گزینه ۲ نمودار هر کدام از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



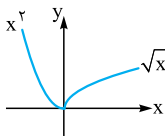
۱  $y = -x^2 + 1$

یک‌به‌یک نیست.



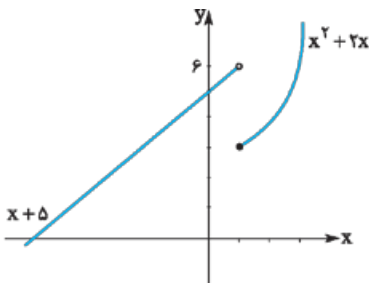
۲  $y = (x-1)^2 + 2$

یک‌به‌یک است.



۳  $y = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$

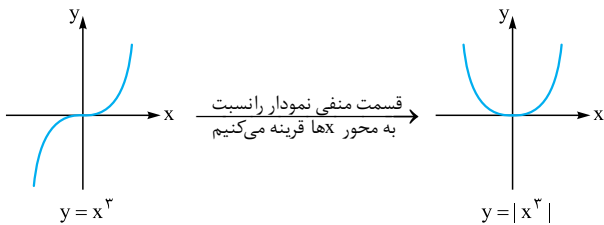
یک‌به‌یک نیست.



۴  $y = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 1 \\ x + 5 & x < 1 \end{cases}$

یک‌به‌یک نیست.

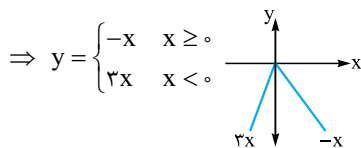
۴۰۹. گزینه ۳ نمودار تابع  $f(x) = |x^3|$  را رسم می‌کنیم:



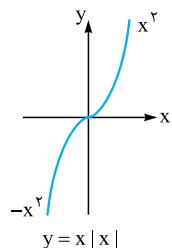
پس تابع  $y = |x^3|$  وارون‌ناپذیر است. حواسمان هست که  $y = |x^3|$  همان  $y = x^2 |x|$  است!

۴۱۰. گزینه ۳ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم که ببینیم کدام یک‌به‌یک است. برای بررسی  $y = x - 2|x|$  نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y = x - 2|x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & y = x - 2x = -x \\ x < 0 & y = x + 2x = 3x \end{cases}$$



پس تابع  $y = x - 2|x|$  یک‌به‌یک نیست.  $y = x[x]$  یک‌به‌یک نیست چون به ازای  $x \in [0, 1)$  مقدارش برابر صفر است.  $y = x - [x]$  یک‌به‌یک نیست چون به ازای تمام اعداد صحیح مقدار  $y$  برابر صفر می‌شود ولی  $y = x|x|$  یک‌به‌یک است. برای این‌که مطمئن شویم کافی است نمودارش را رسم کنیم.



۴۰۶. گزینه ۴

اولاً  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  باید تابع باشد، پس چون  $(3, 2)$  و  $(3, a^2 - a)$  داریم، پس باید  $a^2 - a = 2$  باشد:

$$a^2 - a - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

مقدار  $a = 2$  و  $a = -1$  را قرار می‌دهیم و  $f$  را بررسی می‌کنیم:

$$a = -1 \Rightarrow f = \{(3, 2), (-1, 5), (3, 2), (b, 2), (-1, 4)\}$$

چون  $(-1, 5)$  و  $(-1, 4)$  داریم پس  $f$  تابع نیست.

$$a = 2 \Rightarrow f = \{(3, 2), (2, 5), (3, 2), (b, 2), (-1, 4)\}$$

$f$  تابع است و ثانیاً برای یک‌به‌یک بودنش چون  $(3, 2)$  و  $(b, 2)$  داریم پس باید  $b = 3$  باشد، پس دوتایی مرتب  $(a, b)$  می‌شود  $(2, 3)$ .

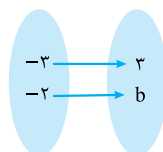
۴۰۷. گزینه ۱

چون از  $a - 1$  و از  $2a + 1$  به  $3$  وصل شده است، پس این‌ها باید با هم برابر باشند:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow a - 1 = 2a + 1 \Rightarrow a = -2$$

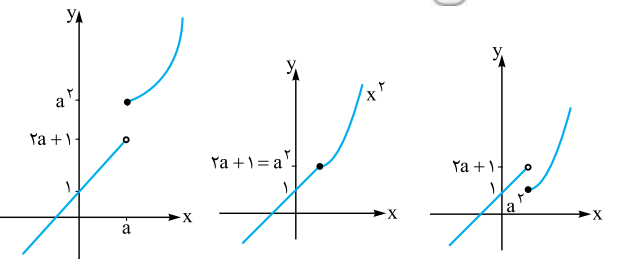
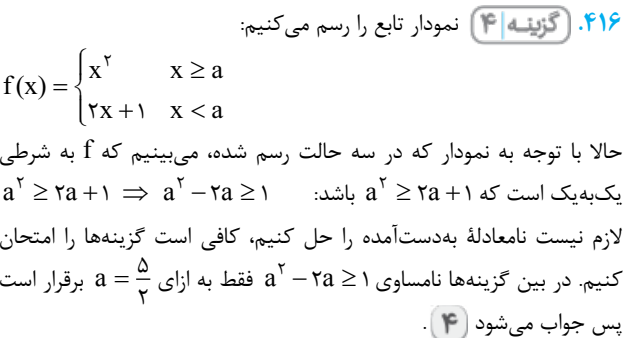
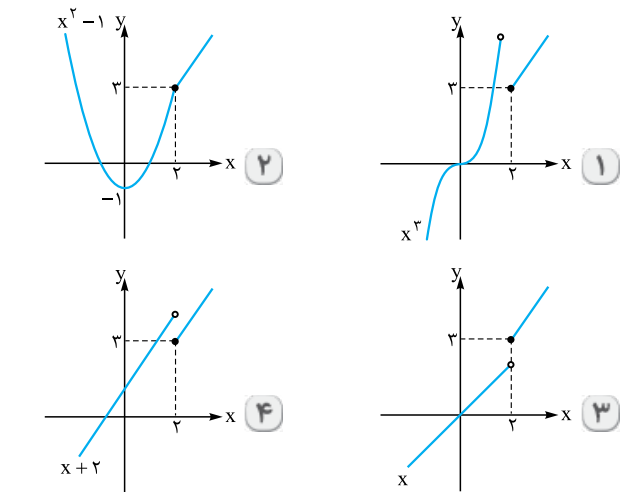
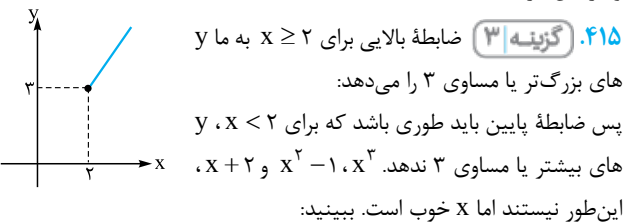
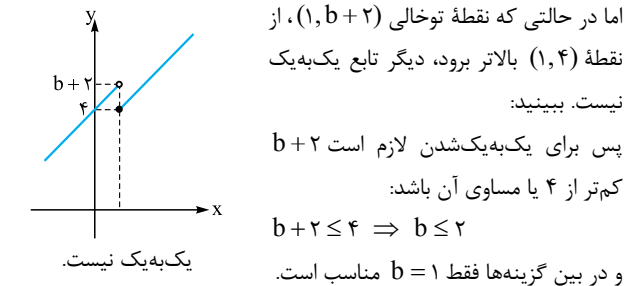
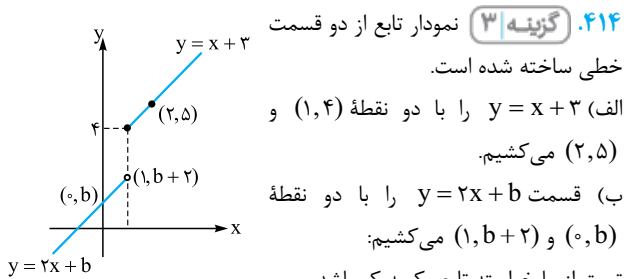
حالا چون از  $a = -2$  به  $b$  وصل شده است،  $b$  نباید

$3$  باشد (مؤلفه دوم تکراری نداریم)، پس  $a = -2$  و  $b \neq 3$ . تابع را هم ببینید:



نظرتان در مورد این گزینه چیست؟  $a = -2$  و  $b \neq 3 - a$

این هم درست است!



**۴۱۱. گزینه ۳** در **۱** از قبل یادمان هست تابع  $y = 2^x$  (تابع نمایی با پایه بزرگ‌تر از ۱) اکیداً صعودی است پس یک‌به‌یک است. در **۲** تابع  $y = \log x$  (مبنا ۱۰ است) اکیداً صعودی است پس یک‌به‌یک است.

در **۴** تابع  $x + [x]$  اکیداً صعودی است (چون  $x$  اکیداً صعودی و  $[x]$  صعودی است) پس وارون دارد. اما در **۳** با کمی دقت داریم:

$$\frac{2x+4}{x+2} \stackrel{x \neq -2}{=} 2$$

که تابعی ثابت و غیر یک‌به‌یک است و تابع وارون ندارد.

**۴۱۲. گزینه ۱** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در **۱**  $y = x^2 + 2\sqrt{x}$  با توجه به دامنه تابع یعنی  $x \geq 0$  هم  $x^2$  و هم  $2\sqrt{x}$  اکیداً صعودی‌اند. پس تابع اکیداً یکنوا و یک‌به‌یک است. پس جواب می‌شود **۱**. بقیه گزینه‌ها را هم بررسی کنیم:

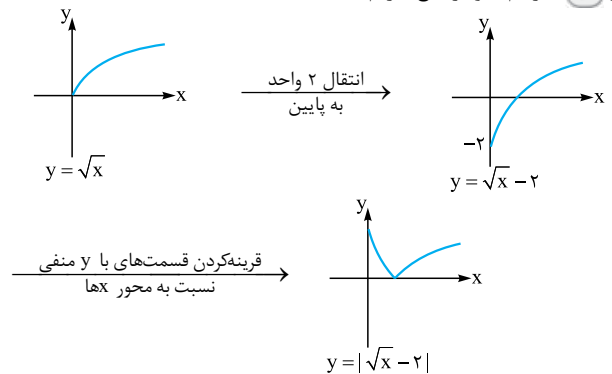
در **۲**  $y = 2x + \frac{1}{x}$  مثلاً به ازای  $x = \frac{1}{4}$  و  $x = 2$  داریم:

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2(2) + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

پس به ازای دو مقدار  $x$ ،  $y$  یکسان داریم. پس یک‌به‌یک نیست.

در **۳** با رسم نمودار تابع داریم:



حالا با توجه به نمودار، تابع  $y = |\sqrt{x} - 2|$  یک‌به‌یک نیست.

در **۴**  $y = x - \sqrt{x}$ ، هم به ازای  $x = 0$  و  $x = 1$  مقدار  $y$  برابر صفر می‌شود پس تابع یک‌به‌یک نیست.

**۴۱۳. گزینه ۴** باید ببینیم کدام یک از تابع‌ها یک‌به‌یک هستند. در **۱**

یعنی  $y = x^4 - 2x^2$  به ازای  $x = 1$  و  $x = -1$  مقدار  $y = -1$  یکسان دارد پس یک‌به‌یک نیست. در درس‌نامه هم داشتیم که توابع با درجه زوج در  $\mathbb{R}$  یک‌به‌یک نیستند.

در **۲** یعنی  $y = [x]$  هم که به ازای  $k \leq x \leq k+1$  برابر  $k$  است پس یک‌به‌یک نیست.

در **۳** یعنی  $y = x^3 - 2x^2$  مقدار  $y$  به ازای  $x = 0$  و  $x = 3$  برابر صفر می‌شود پس این هم یک‌به‌یک نیست. نمودار این تابع را در فصل کاربرد مشتق یاد می‌گیریم.

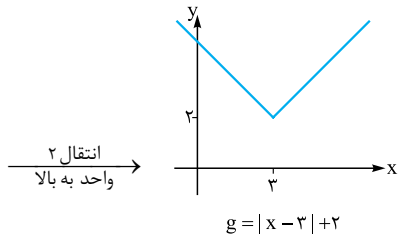
بنابراین جواب می‌شود **۴**. یعنی  $y = x^2 + x + 1$  برای دلیلش هم می‌توانیم بگوییم:

$$f(x) = x^2 \text{ صعودی اکید} \Rightarrow y = (f+g)(x) \text{ صعودی اکید}$$

$$g(x) = x+1 \text{ صعودی اکید}$$

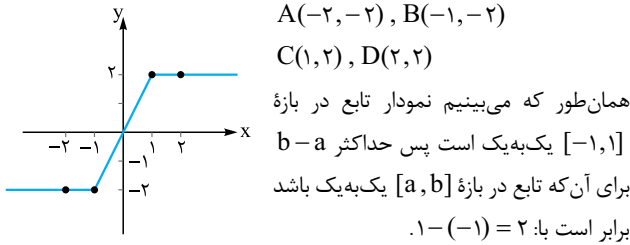
$$\Rightarrow y = x^2 + x + 1 \text{ صعودی اکید}$$

و چون تابع صعودی اکید است پس یکنوا اکید و در نتیجه یک‌به‌یک است.

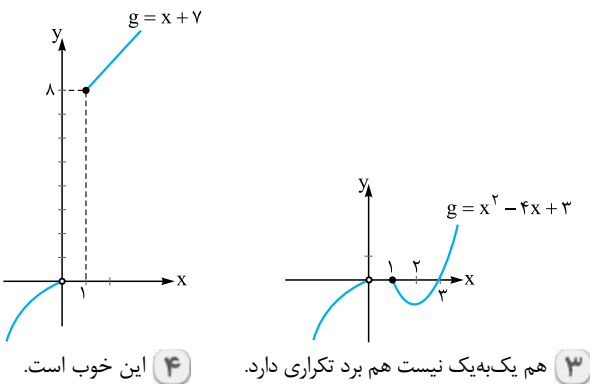
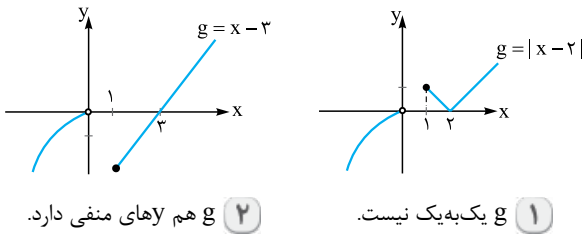


حالا با توجه به نمودارها هر دو تابع در بازه  $[-1, 2]$  یک‌به‌یک هستند.

**گزینه ۲** نمودار تابع  $f(x) = |x+1| - |x-1|$  را رسم می‌کنیم:  
 $f(x) = |x+1| - |x-1|$



**گزینه ۴** ضابطه پایین یعنی  $-x^2$ ، با دامنه  $x < 0$ ، تمام  $y$ های منفی را تولید می‌کند. پس باید  $g(x)$  اصلاً  $y$ های منفی ندهد و خودش یک‌به‌یک باشد. در بین گزینه‌ها، **۴** مناسب است. نمودارها را ببینید:



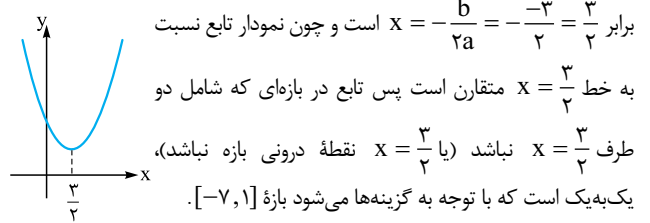
**گزینه ۴** گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ را که در درس‌نامه داشتیم اما در مورد **۴** همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم اگر  $f$  تابعی غیر یک‌به‌یک باشد،  $f^{-1}$  (یعنی وارون آن) تابع نیست. پس اگر  $f$  تابع باشد،  $f^{-1}$  به شرطی تابع است که  $f$  یک‌به‌یک باشد.

**گزینه ۴** داریم:  $f = \{(1, 2), (-3, -1), (3, 4), (4, -3)\}$   
 پس  $f(3) = 4$  و  $f^{-1}(-3) = 4$  و در نتیجه:

$2f^{-1}(-3) + f(3) = 2(4) + 4 = 12$   
**گزینه ۳** اول  $f^{-1}$  را به دست می‌آوریم:

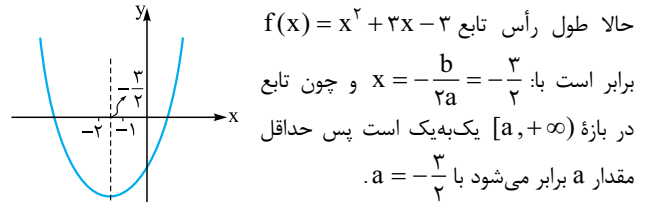
$f = \{(-1, 0), (1, 2), (0, 1), (2, -1)\}$   
 $f^{-1} = \{(0, -1), (2, 1), (1, 0), (-1, 2)\}$

**گزینه ۳** تابع  $f(x) = x^2 - 3x + 5$  یک سهمی است که طول رأسش

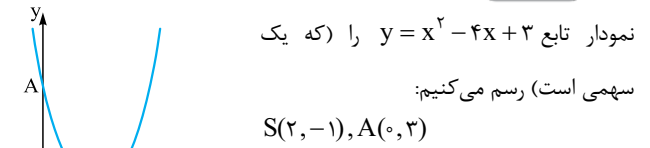


**گزینه ۴** اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

$f(x) = (x-1)(x+3) + x = x^2 + 2x - 3 + x$   
 $\Rightarrow f(x) = x^2 + 3x - 3$



**گزینه ۲**

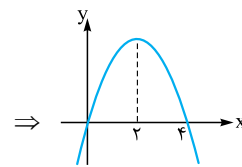


در مورد گزینه‌های **۱** و **۴** چون رأس سهمی یعنی  $x = 2$  درون این بازه‌ها قرار دارد، سهمی یک‌به‌یک نمی‌شود. برای **۳** هم شکل را ببینید:  
 در این نمودار هم سهمی یک‌به‌یک نمی‌شود. پس جواب می‌شود **۲**. چون تابع  $f$  در مجموعه داده شده یک‌به‌یک است.

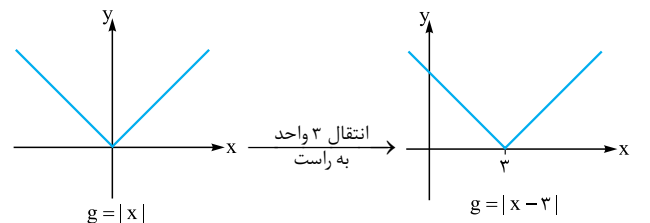
**گزینه ۱** تابع  $f(x) = (a-1)x^2 - 2x + a + 4$  بر روی  $\mathbb{R}$  یک‌به‌یک است، پس نباید درجه دوم باشد و ضریب  $x^2$  باید برابر صفر شود (چون نمودار تابع درجه دوم یک سهمی است که روی  $\mathbb{R}$  یک‌به‌یک نیست)، یعنی  $a = 1$  و در نتیجه  $f(x) = -2x + 5$ . بنابراین:  $af(2) = 1 \times (-2(2) + 5) = 1$

**گزینه ۴** نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم:

$f(x) = -x(x-4) = -x^2 + 4x$   
 $(0, 0)$  برخورد با محور  $y$ ها و  $(2, 4)$  رأس  $\Rightarrow$  سهمی



$g(x) = |x-3| + 2$





جواب ندارد.  $\Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)(1) < 0 \Rightarrow$  پس به ازای هیچ مقدار  $a$  نمودار  $f$  از نقطه  $(a, a+2)$  نمی‌گذرد.

**۴۳۱. گزینه ۲** نقطه برخورد وارون تابع و محور  $x$ ها یعنی در تابع وارون  $y=0$  باشد، پس در خود تابع  $y = x^2 + 2x - 3$  داریم  $x=0$  و چون  $x=0 \Rightarrow y = -3$  پس وارون تابع محور  $x$ ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

**۴۳۲. گزینه ۱** روی نمودار  $f^{-1}$  نقطه  $(\frac{1}{4}, a)$  داریم پس نقطه  $(\frac{1}{4}, a)$  باید روی نمودار  $f$  باشد:

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} = a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - 4 = a \Rightarrow a = -\frac{15}{4}$$

از طرف دیگر نقطه  $(0, b)$  روی نمودار  $f^{-1}$  است، پس روی نمودار  $f$  باید نقطه  $(b, 0)$  را داشته باشیم:

$$(b, 0) \xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}} \sqrt{b} - \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow \frac{b\sqrt{b}-1}{b} = 0$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b} = 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} b^3 = 1 \Rightarrow b = 1$$

پس حاصل  $a+b$  برابر است با:  $-\frac{15}{4} + 1 = -\frac{11}{4}$

**۴۳۳. گزینه ۳**  $g$  وارون تابع  $f$  است، یعنی  $g = f^{-1}$ ، حالا داریم:

$$g(6) = f^{-1}(6) = a \Rightarrow f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6$$

$$\xrightarrow{\text{عددگذاری}} a = 4$$

$$g(12) = f^{-1}(12) = b \Rightarrow f(b) = 12 \Rightarrow b + \sqrt{b} = 12$$

$$\xrightarrow{\text{عددگذاری}} b = 9$$

پس  $g(6) + g(12) = 4 + 9 = 13$  یا همان  $f^{-1}(6) + f^{-1}(12) = 13$  است.

**۴۳۴. گزینه ۳** در تابع  $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & x \geq 3 \\ x+1 & x < 3 \end{cases}$  فرض می‌کنیم

$f^{-1}(-5) = a$  باشد، در این صورت باید  $f(a) = -5$  باشد. پس هر کدام از ضابطه‌ها را برابر  $-5$  قرار می‌دهیم. مقدار به دست آمده برای  $a$  در صورتی قابل قبول است که در محدوده تعریف ضابطه باشد:

$$x \geq 3 \Rightarrow 4a+3 = -5 \Rightarrow a = -2 \text{ غرق}$$

$$x < 3 \Rightarrow a+1 = -5 \Rightarrow a = -6 \text{ قق}$$

$$f^{-1}(5) = a = -6 \text{ پس}$$

**۴۳۵. گزینه ۱** اگر  $x = f^{-1}(3)$  قرار دهیم داریم:

$$f(f^{-1}(3)) = f^{-1}(3) + 2f^{-1}(3) - 1$$

$$\Rightarrow 3 = 3f^{-1}(3) - 1 \Rightarrow f^{-1}(3) = \frac{4}{3}$$

$$f(x) = \frac{4}{3} + 2x - 1 \text{ مقدار } f(3) \text{ می‌شود. } \frac{4}{3} + 5 = \frac{19}{3}$$

**۴۳۶. گزینه ۲ | راه ۱** می‌دانیم دامنه  $f^{-1}$  برابر برد  $f$  است. پس برای پیدا کردن دامنه تابع معکوس تابع  $f(x) = 3 - |x+1|$  باید برد تابع  $f$  را پیدا کنیم. می‌دانیم حاصل یک قدرمطلق همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، حاصل  $|x-1|$  هم به ازای  $x \leq -1$  همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس:

$$|x+1| \geq 0 \Rightarrow -|x+1| \leq 0 \Rightarrow 3 - |x+1| \leq 3 \Rightarrow f(x) \leq 3$$

پس برد  $f$  برابر بازه  $(-\infty, 3]$  و در نتیجه دامنه  $f^{-1}$  هم برابر بازه  $(-\infty, 3]$  است.

حالا  $\frac{f}{f^{-1}}$  را پیدا می‌کنیم:  $\frac{f}{f^{-1}} = \{(-1, \frac{0}{-1}), (1, \frac{3}{1}), (0, \frac{1}{-1}), (2, \frac{-1}{1})\}$  حواسمان هست که  $\frac{f}{f^{-1}}$  به ازای  $x=1$  تعریف نشده است؛ پس:

$$\frac{f}{f^{-1}} = \{(-1, 0), (0, -1), (2, -1)\}$$

یعنی  $\frac{f}{f^{-1}}$  سه زوج مرتب دارد.

**۴۳۷. گزینه ۱** رابطه  $f = \{(2, a+1), (\sqrt{b}, 3)\}$  دو زوج مرتب و رابطه  $f^{-1} = \{(a-1, c+1), (d, b-2)\}$  هم دو زوج مرتب دارد. پس هر کدام از زوج مرتب‌های  $f^{-1}$  باید وارون یکی از زوج مرتب‌های  $f$  باشند (یعنی در زوج مرتب  $f^{-1}$  جای  $x$  و  $y$  زوج مرتب  $f$  عوض شود)، پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = c+1 \\ a+1 = a-1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{غیرممکن} \Rightarrow \text{وارون} \left\{ \begin{array}{l} 2 = a+1 \\ a-1 = c+1 \end{array} \right. \text{ الف}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = b-2 \\ a+1 = d \end{array} \right. \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \text{وارون} \left\{ \begin{array}{l} 2 = a+1 \\ a-1 = d \end{array} \right. \text{ ب}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{b} = c+1 \\ 3 = a-1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{وارون}} \left\{ \begin{array}{l} a-1 = c+1 \\ 3 = \sqrt{b}-2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{b} = c+1 \\ 3 = a-1 \end{array} \right. \xrightarrow{b=4} \left\{ \begin{array}{l} c=1 \\ a=4 \end{array} \right. \xrightarrow{a+1=d} d = 5$$

پس  $a+b+c+d$  برابر است با:  $4+4+1+5 = 14$

**۴۳۸. گزینه ۱** با توجه به نمودار تابع  $f$  برای پیدا کردن  $f^{-1}(-5)$  باید نقطه‌ای روی نمودار  $f$  پیدا کنیم که عرضش برابر  $-5$  باشد؛ یعنی معادله خطی را بنویسیم که از  $(0, -2)$  و  $(-1, -4)$  می‌گذرد:

$$(0, -2), (-1, -4) \Rightarrow m = \frac{-4 - (-2)}{-1 - 0} = \frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow y = 2x - 2$$

بنابراین باید  $2x - 2 = -5$  باشد که می‌شود  $x = -\frac{3}{2}$  یعنی  $f^{-1}(-5) = -\frac{3}{2}$ . برای پیدا کردن  $f^{-1}(4)$  هم باید معادله خطی را بنویسیم که از نقاط  $(0, -2)$  و  $(2, 0)$  می‌گذرد:

$$(0, -2), (2, 0) \xrightarrow{f} m = \frac{0 - (-2)}{2 - 0} = 1 \Rightarrow y = x - 2$$

بنابراین باید  $x - 2 = 4$  باشد یعنی  $x = 6$  و در نتیجه  $f^{-1}(4) = 6$  بنابراین داریم:

$$f^{-1}(-5) + f^{-1}(4) = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{-3+12}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

**۴۳۹. گزینه ۱** همان‌طور که می‌دانیم  $f^{-1}(6) = 1$  و  $f^{-1}(21) = 4$ . پس  $f(1) = 6$  و  $f(4) = 21$ ، یعنی خط  $y = ax + b$  از دو نقطه  $(1, 6)$  و  $(4, 21)$  می‌گذرد:

$$(1, 6), (4, 21) \Rightarrow m = \frac{21-6}{4-1} = 5 \Rightarrow y = 5x + 1$$

پس  $f(x) = ax + b$  باید به شکل  $f(x) = 5x + 1$  باشد و در نتیجه  $a = 5$  و  $b = 1$ .

**۴۴۰. گزینه ۱** نمودار تابع  $f^{-1}$  از نقطه  $(a+2, a)$  می‌گذرد. پس نمودار تابع  $f$  از نقطه  $(a, a+2)$  می‌گذرد، در نتیجه:

$$y = \frac{x-4}{2x-1} \xrightarrow{(a, a+2)} a+2 = \frac{a-4}{2a-1}$$

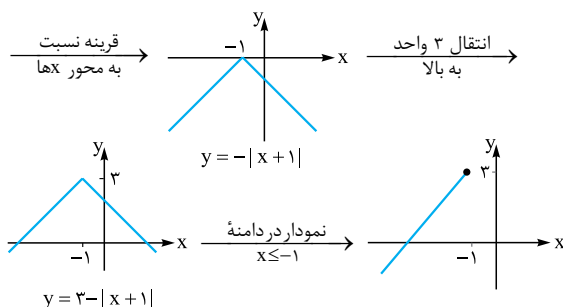
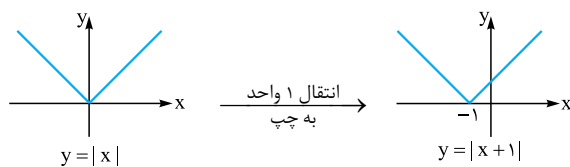
$$\Rightarrow (a+2)(2a-1) = a-4 \Rightarrow 2a^2 - a + 4a - 2 = a - 4$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0 \xrightarrow{\pm 2} a^2 + a + 1 = 0$$



**راه II**

برای پیدا کردن  $D_{f^{-1}}$  یا همان برد  $f$ ، می‌توانیم نمودار تابع  $f$  را هم رسم کنیم:



حالا طبق نمودار برد تابع  $f$  (یا همان دامنه تابع  $f^{-1}$ ) برابر است با  $(-\infty, 3]$ .

**گزینه ۲** باید دامنه و برد  $g^{-1}$  را پیدا کنیم و چون  $D_{g^{-1}} = R_g$  و

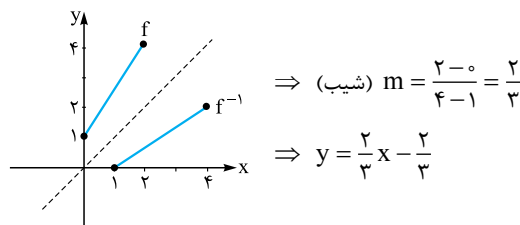
$R_{g^{-1}} = D_g$  پس باید دامنه و برد  $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$  را پیدا کنیم:

$$g(x) = 1 + \sqrt{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه: } x \geq 2 \Rightarrow D_g = [2, +\infty) \\ \text{برد: } \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 \geq 1 \\ \text{برد: } y \geq 1 \Rightarrow R_g = [1, +\infty) \end{cases}$$

پس  $D_{g^{-1}} = [1, +\infty)$  و  $R_{g^{-1}} = [2, +\infty)$  در دامنه و برد  $g^{-1}$  فقط یک عضو صحیح غیرمشترک هست.

**گزینه ۱** طبق شکل زیر نمودار تابع  $f^{-1}$  از نقاط  $(1, 0)$  و

$(4, 2)$  می‌گذرد. پس ضابطه‌اش برابر است با:



**راه II** اول ضابطه خود تابع را پیدا می‌کنیم، تابع  $f$  پاره‌خطی است که از

نقاط  $(0, 1)$  و  $(2, 4)$  می‌گذرد، پس:

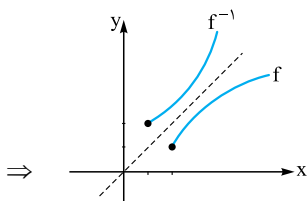
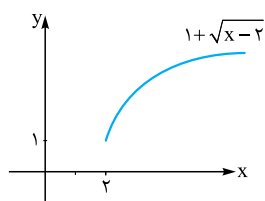
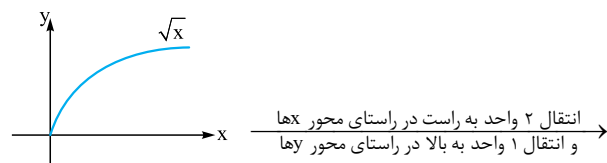
$$(0, 1), (2, 4) \Rightarrow \text{شیب } m = \frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$$

حالا ضابطه  $f^{-1}$  را پیدا می‌کنیم:  $y = \frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = y - 1$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

**گزینه ۱** اول نمودار تابع  $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$  را با انتقال نمودار

تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  رسم می‌کنیم و بعد قرینه‌اش را نسبت به خط  $y = x$  رسم می‌کنیم، تا نمودار  $f^{-1}$  به دست آید:



**گزینه ۳** ۴۴۰

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

اول نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم. نمودار تابع معکوس  $f$ ، قرینه نمودار آن نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم است.

**گزینه ۳** ۴۴۱

اول نمودار تابع  $f(x) = x|x|$  که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

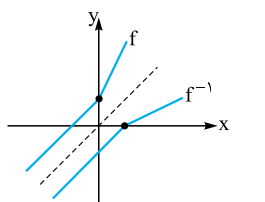
برابر است با  $f(x) = x|x|$  را رسم می‌کنیم. نمودار تابع  $y = f^{-1}(x)$  قرینه نمودار  $f$  نسبت به خط  $y = x$  است:

**گزینه ۴** ۴۴۲

نمودار تابع  $f(x)$  را داریم. نمودار تابع  $f^{-1}(x)$  قرینه نمودار تابع  $f$  نسبت به خط  $y = x$  است، حالا دامنه تابع  $f^{-1}(x)$  برابر بازه‌ای است که در آن  $f^{-1}(x) \geq 0$  باشد که می‌شود  $x \geq 2$ .

**گزینه ۲** ۴۴۳

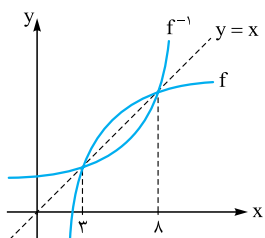
برای رسم نمودار  $f^{-1}$  کافی است وارون نمودار  $f$  را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم رسم کنیم:



حالا دقت کنید که ما  $2f^{-1}(x-1)$  را می‌خواهیم پس باید  $f^{-1}$  را یک واحد به راست برده و عرض‌ها را ۲ برابر کنیم: که از ناحیه دوم نمی‌گذرد.

**گزینه ۴** ۴۴۴

دامنه تابع  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$  برابر بازه‌ای است که در آن  $x - f^{-1}(x) \geq 0$  باشد. با توجه به شکل، خط  $y = x$  در بازه  $[3, 8]$  بالای منحنی تابع قرار می‌گیرد. پس دامنه تابع  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$  برابر است با بازه  $[3, 8]$ .



انتقال ۲ واحد به راست در راستای محور xها و انتقال ۱ واحد به بالا در راستای محور yها





۴۴۷. گزینه ۱ | راه I معادله قرینه خط  $3y - 2x = 4$  را  $d_1$  را

نسبت به خط  $y = x$  پیدا می‌کنیم (جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم):

$$d: 3x - 2y = 4 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow y = -2$$

۴۴۸. گزینه ۲ | راه II اگر فرض کنیم خط  $3y - 2x = 4$  ضابطه یک تابع مانند  $f$

است، خط  $d$ ، قرینه آن نسبت به خط  $y = x$ ، ضابطه تابع وارون آن یعنی  $f^{-1}$  است، پس عرض از مبدأ خط  $d$ ، برابر طول از مبدأ خط  $3y - 2x = 4$  است، بنابراین داریم:

$$3y - 2x = 4 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$$

۴۴۸. گزینه ۲ | راه I در درس‌نامه داشتیم اگر  $f$  یک تابع خطی

باشد  $f$  و وارون  $f$  در دو صورت بر هم منطبق‌اند:

الف)  $f(x) = x$  باشد.

ب)  $f(x) = -x + b$  باشد (چون خط  $y = -x + b$  بر نیمساز ناحیه اول و سوم عمود است و قرینه‌اش نسبت به نیمساز می‌شود خودش). پس حالا که داریم  $f(x) = ax + 1$  باید  $a = -1$  باشد.

۴۴۸. گزینه ۲ | راه II وارون تابع  $f$  را پیدا می‌کنیم:

$$y = ax + 1 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a} \Rightarrow ax = y - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{1}{a}$$

حالا دو خط  $y = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}$  و  $y = ax + 1$  باید بر هم منطبق باشند، پس باید  $a$  برابر  $-1$  باشد.

۴۴۹. گزینه ۲ دو خط  $ax + by = 8$  و  $2x - 3y = b$  را  $d_1$  و  $d_2$  نسبت

به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه یکدیگرند پس قرینه  $d_2$  را نسبت به نیمساز ناحیه

اول و سوم پیدا می‌کنیم:  $2x - 3y = b \xrightarrow{x \leftrightarrow y} 2y - 3x = b$

حالا دو خط  $2y - 3x = b$  و  $ax + by = 8$  باید بر هم منطبق باشند پس ضرایب  $x$  و  $y$  و عدد ثابت دو خط باید با هم متناسب باشند:

$$\begin{cases} -3x + 2y = b \\ ax + by = 8 \end{cases} \xrightarrow{\text{منطبق بر هم}} -\frac{3}{a} = \frac{2}{b} = \frac{b}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{b}{8} \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow -\frac{3}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -6 \\ b = -4 \Rightarrow -\frac{3}{a} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 6 \end{cases}$$

پس یا  $a = -6$  و  $b = 4$  که  $a + b = -2$  می‌شود یا  $a = 6$  و  $b = -4$  که  $a + b = 2$  می‌شود.

۴۵۰. گزینه ۴ | راه I مثل همیشه برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون،

$x$  را برحسب  $y$  پیدا می‌کنیم و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow xy - y = 1 \Rightarrow xy = y + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$$

و چون  $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}$  پس  $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

۴۵۰. گزینه ۴ | راه II در درس‌نامه دیدیم وارون تابع  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  به صورت  $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$

است، پس:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{0 \cdot x + 1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-0} = \frac{x+1}{x}$$

۴۴۵. گزینه ۳ | راه I برای پیدا کردن تابع معکوس تابع

$f(x) = 2x + 4$  با دامنه  $[-1, 3]$  اولاً در مورد ضابطه مثل همان چیزی که

قبلاً گفتیم، داریم:  $y = 2x + 4 \Rightarrow 2x = y - 4 \Rightarrow x = \frac{y-4}{2}$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

و ثانیاً در مورد دامنه  $f^{-1}$  هم می‌دانیم که دامنه  $f^{-1}$  همان برد  $f$  است پس باید برد تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = 2x + 4$  و دامنه  $[-1, 3]$  را پیدا کنیم:

$$-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow 2 \leq 2x + 4 \leq 10$$

$$\Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 10$$

پس برد  $f$  برابر بازه  $[2, 10]$  و در نتیجه دامنه  $f^{-1}$  هم برابر بازه  $[2, 10]$  است،

پس تابع معکوس  $f$  می‌شود:  $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}, 2 \leq x \leq 10$

۴۴۵. گزینه ۳ | راه II بعد از پیدا کردن ضابطه تابع وارون یعنی

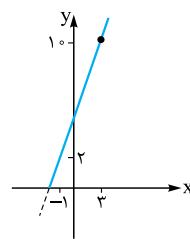
$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

می‌توانیم نمودار تابع  $f$  را رسم و برد  $f$  را تعیین کنیم:

$$f(x) = 2x + 4, x \in [-1, 3]$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (-1, 2)$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (3, 10)$$



حالا با توجه به نمودار برد تابع  $f$  برابر است با  $[2, 10]$  پس دامنه  $f^{-1}$  هم می‌شود  $2 \leq x \leq 10$ .

۴۴۶. گزینه ۴ برای پیدا کردن وارون یک تابع دوضابطه‌ای  $f$  در هر کدام

از ضابطه‌ها:

الف) ضابطه وارون را پیدا می‌کنیم ( $x$  را برحسب  $y$  پیدا و جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم) و ب) برای هر کدام از ضابطه‌ها برد تابع  $f$  را با رسم نمودار پیدا می‌کنیم که برابر می‌شود با دامنه  $f^{-1}$ ، ببینیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ 4x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

ضابطه بالا:  $y = 2x - 1 \Rightarrow 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

دامنه  $f^{-1}: x < -1$   $(0, -1), (-1, -2) \Rightarrow$



ضابطه پایین:  $y = 4x + 1 \Rightarrow 4x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$



دامنه  $f^{-1}: x \geq 1$   $(0, 1), (1, 5) \Rightarrow$

پس ضابطه  $f^{-1}(x)$  برابر است با:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x < -1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & x \geq 1 \end{cases}$$



**راه II** برای پیدا کردن ضابطه  $f^{-1}$  با شرط  $x \geq 2$ ،  $x$  را بر حسب  $y$  پیدا

می‌کنیم و برای پیدا کردن دامنه  $f^{-1}$  برد خود تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1} \text{ ضابطه } y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y - 1 = (x - 2)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y-1} = |x-2| \xrightarrow{x \geq 2} x-2 = \sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow x = 2 + \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 2 + \sqrt{x-1}$$

$$f^{-1} \text{ دامنه } y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow y \geq 1$$

$$\Rightarrow f \text{ برد } y \geq 1 \Rightarrow f^{-1} \text{ دامنه } x \geq 1$$

**۴۵۶ گزینه ۱** ضابطه تابع وارون  $f$  را با شرط  $x \leq 1$  پیدا می‌کنیم:

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{تبدیل به مربع کامل}} y+1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow y+1 = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \sqrt{y+1} = |x-1|$$

$$\xrightarrow{\text{چون } x \leq 1} \sqrt{y+1} = -x+1 \Rightarrow x = -\sqrt{y+1} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض می‌کنیم}} y = -\sqrt{x+1} + 1$$

پس  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} + 1$  است که با مقایسه‌اش با  $y = a\sqrt{x+b} + c$

داریم  $a = -1$  و  $b = 1$  و  $c = 1$  پس  $a + b - c^2$  برابر است با:

$$-1 + 1 - (1)^2 = -1$$

**۴۵۷ گزینه ۳ عددگذاری** در خود تابع نقطه  $(1, 9)$  را داریم پس در

گزینه درست باید  $(9, 1)$  بخورد.

**راه II**  $x$  را بر حسب  $y$  پیدا می‌کنیم و جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم:

$$y = x^2 + 3x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y = x^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 1$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2 + 1 \Rightarrow (x+1)^2 = y-1$$

$$\Rightarrow x+1 = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{y-1} - 1$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \sqrt{x-1} - 1$$

**۴۵۸ گزینه ۲ عددگذاری** در تابع فرض می‌کنیم  $x = -\frac{1}{4}$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{16} - 2\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{9}{16}$$

پس در تابع وارون باید داشته باشیم  $y = \frac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$  که فقط در **۲**

صدق می‌کند.

**راه II** در تابع  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ ،  $x$  را بر حسب  $y$ ، با توجه به

$$y = (x^2 - 1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y} = |x^2 - 1| \quad -1 < x < 0$$

$$\xrightarrow{-1 < x < 0} \sqrt{y} = -x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \sqrt{y}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x| = \sqrt{1 - \sqrt{y}} \xrightarrow{-1 < x < 0} -x = \sqrt{1 - \sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{1 - \sqrt{y}} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -\sqrt{1 - \sqrt{x}}$$

پس تابع وارون  $y = -\sqrt{1 - \sqrt{x}}$  است.

**۴۵۹ گزینه ۳ عددگذاری** زوج‌های مرتب  $(1, 1)$  و  $(-1, -1)$  در  $f$

هستند و عکس آن‌ها باید در  $f^{-1}$  باشد که فقط به **۳** می‌خورد.

**راه II** قرار شد برای محاسبه تابع وارون،  $x$  را بر حسب  $y$  پیدا کنیم و سپس

جای  $x$  و  $y$  را عوض کنیم. در تابع‌های دوضابطه‌ای (یا چندضابطه‌ای) این کار را

برای هر کدام از ضابطه‌ها انجام می‌دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}; x \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x} \\ \Rightarrow x = y^2 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x^2 \\ -\sqrt{-x}; x < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{-x} \\ \Rightarrow y^2 = -x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -x^2 \end{cases}$$

**۴۵۱ گزینه ۲** از درس‌نامه یادمان هست که تابع  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  به شرطی

وارون خودش است که  $a = -d$ ، در تابع  $f(x) = \frac{2x+3}{x+b}$  باید  $b = -2$

باشد، پس  $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$  است و در نتیجه  $f(0) = -\frac{3}{2}$ .

**۴۵۲ گزینه ۲ راه I** در درس‌نامه دیدیم که نمودار تابع هموگرافیک،

نمودار تابع وارونش را روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کند، یعنی روی خط  $y = x$ . پس می‌توانیم مقدار  $x$  را از گزینه‌ها در ضابطه تابع قرار دهیم و در هر

کدام که  $y$  برابر  $x$  شد جواب است:

$$y = \frac{x+4}{x-2} \quad x=1 \Rightarrow y = \frac{1+4}{1-2} = -5 \neq x$$

$$x=-1 \Rightarrow y = \frac{-1+4}{-1-2} = -1 \checkmark$$

$$x=4 \Rightarrow y = \frac{4+4}{4-2} = 4 \checkmark$$

$$x=-4 \Rightarrow y = \frac{-4+4}{-4-2} = 0 \neq x$$

پس جواب می‌شود  $x = -1$  و  $x = 4$ .

**راه II** تابع  $y = \frac{x+4}{x-2}$  را با نیمساز ناحیه اول و سوم تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x+4 = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = 4$$

**۴۵۳ گزینه ۲ راه I** برد  $\sqrt{x+3}$  شامل اعداد بیشتر یا مساوی

صفر است (پس دامنه  $f^{-1}$  باید  $x \geq 0$  باشد) به ازای  $x = 1$  داریم  $y = 2$ . پس

در وارون آن نقطه  $(2, 1)$  صدق می‌کند و جواب می‌شود **۲**.

**راه II** ضابطه تابع وارون و دامنه‌اش را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1} \text{ ضابطه } y = \sqrt{x+3} \Rightarrow y^2 = x+3$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 3 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x^2 - 3$$

$$f^{-1} \text{ دامنه } \sqrt{x+3} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$$

$$\Rightarrow f \text{ برد } y \geq 0 \Rightarrow f^{-1} \text{ دامنه } x \geq 0$$

**۴۵۴ گزینه ۱ عددگذاری** در تابع  $f$  داریم:  $f(5) = 0$  پس در وارون

آن  $f^{-1}(0) = 5$  که فقط به **۱** می‌خورد.

**راه II** با توجه به گزینه‌ها هم باید ضابطه تابع وارون و هم دامنه آن را پیدا

کنیم. برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون داریم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x-1 = (2-y)^2 \Rightarrow x = 4 - 4y + y^2 + 1$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x^2 - 4x + 5$$

و برای پیدا کردن دامنه  $f^{-1}$  می‌گوییم دامنه  $f^{-1}$  برابر برد  $f$  است و چون در  $f$

داریم  $y = 2 - \sqrt{x-1}$ ، می‌نویسیم:

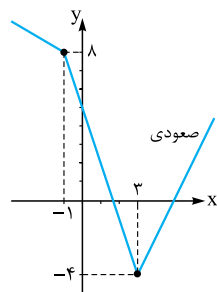
$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq 2$$

پس برد  $f$  برابر است با  $y \leq 2$  و در نتیجه دامنه  $f^{-1}$  هم می‌شود  $x \leq 2$ ؛ یعنی

تابع وارون برابر است با:  $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$

**۴۵۵ گزینه ۱ عددگذاری** از  $f(2, 1)$  می‌گذرد پس باید  $(1, 2)$  در

وارونش هم صدق کند که فقط به **۱** می‌خورد.



۴۶۲. گزینه ۳

**راه I** نمودار  $f$  را می‌کشیم، ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها  $x = 3$  و  $x = -1$  هستند، نقاط شکستگی نمودار برای  $x$ های بزرگ  $1 = 3 - 1 = 2$  و برای  $x$ های خیلی منفی،  $-1 = -1 - (-1) = -2$  است. ببینید:

تابع با دامنه  $[-4, +\infty)$  و برد  $(-\infty, 3]$  صعودی است. پس دامنه وارونش  $x \geq -4$  است و وارون آن از نقطه  $(-4, 2)$  می‌گذرد.

**راه II** ضابطه تابع  $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$  را ساده می‌کنیم تا ببینیم در کدام بازه صعودی است.

$$\begin{aligned} x < -1 &\Rightarrow y = -2x + 6 + x + 1 \Rightarrow y = -x + 7 && \text{نزولی} \\ -1 \leq x < 3 &\Rightarrow y = -2x + 6 - x - 1 \Rightarrow y = -3x + 5 && \text{نزولی} \\ 3 \leq x &\Rightarrow y = 2x - 6 - x - 1 \Rightarrow y = x - 7 && \text{صعودی} \end{aligned}$$

پس باید ضابطه تابع وارون را برای  $x \geq 3$  و  $x < -1$  پیدا کنیم:

$$y = x - 7 \Rightarrow \begin{cases} \text{ضابطه وارون: } y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \\ \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x + 7 \\ \text{دامنه وارون: } x \geq 3 \Rightarrow x - 7 \geq -4 \\ \Rightarrow y \geq -4 \xrightarrow{\text{در تابع وارون}} x \geq -4 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع وارون برابر است با:  $f^{-1}(x) = x + 7$  و  $x \geq -4$ . در گزینه‌ها حالت تساوی را نداریم، پس  $x > 4$  را در نظر می‌گیریم.

۴۶۳. گزینه ۲ **عددگذاری** در خود تابع نقطه  $(-1, -4)$  را داریم، پس در وارونش باید  $(-4, -1)$  را داشته باشیم که فقط در **۲** صدق می‌کند.

**راه II** اول ضابطه تابع را به ازای  $x$ های مثبت و منفی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y &= 3x - |x| \\ x \geq 0 &\Rightarrow y = 3x - x \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \\ \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y &= \frac{x}{2} \\ x < 0 &\Rightarrow y = 3x + x \Rightarrow y = 4x \Rightarrow x = \frac{y}{4} \\ \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y &= \frac{x}{4} \end{aligned}$$

پس تابع وارون برابر است با:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{4} & x < 0 \end{cases}$$

حالا اگر گزینه‌ها را به ازای  $x \geq 0$  و  $x < 0$  ساده کنیم **۲** برابر  $f^{-1}$  است:

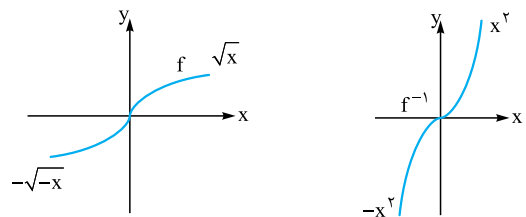
$$y = \frac{3x + |x|}{4} = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{4} & x < 0 \end{cases}$$

۴۶۴. گزینه ۴ **عددگذاری** تابع از نقاط  $(0, 0)$  و  $(4, 2)$  عبور می‌کند پس  $(0, 0)$  و  $(2, 4)$  باید در وارونش صدق کنند که فقط به **۴** می‌خورد.

**راه II** ضابطه تابع را به ازای  $x > 0$  و  $x < 0$  جدا می‌کنیم و در هر حالت ضابطه تابع وارون (به همراه دامنه تابع وارون) را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع وارون برابر است با  $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$  که می‌تواند به صورت  $f(x) = x|x|$  نوشته شود. نمودار تابع و وارونش را ببینید:



۴۶۰. گزینه ۱ **عددگذاری** در تابع  $f$  به ازای  $x = -2$  داریم  $y = -2$ . پس وارون آن باید در شرایط  $f^{-1}(-2) = -2$  صدق کند که فقط به **۱** می‌خورد.

**نشانده** این تابع در  $x < -2$  یک‌به‌یک نیست (تابع ثابت است).

**راه II** از اول تابع را به یک تابع دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

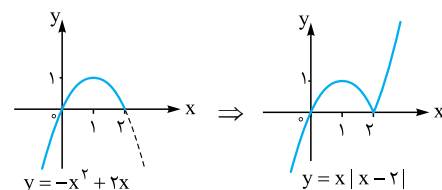
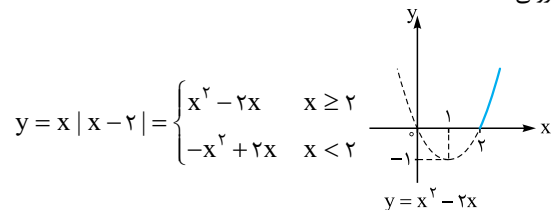
$$f(x) = x + |x + 2| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x \geq -2 \\ -2 & x < -2 \end{cases}$$

از بین دو ضابطه تابع، ضابطه  $y = 2x + 2$  در بازه  $x \geq -2$  وارون‌پذیر است (چون ضابطه دیگر  $y = -2$  یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیست). ضابطه تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x \geq -2: y = 2x + 2 &\Rightarrow x = \frac{y-2}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-2}{2} \\ \text{پس ضابطه تابع وارون برابر است با:} & y = \frac{x-2}{2} \text{ و } x \geq -2 \end{aligned}$$

۴۶۱. گزینه ۳ **عددگذاری** در تابع  $f$  نقطه  $(2, 0)$  می‌خورد پس باید  $(0, 2)$  در وارونش صدق کند که فقط در **۳** این‌طور است!

**راه II** اول نمودار تابع  $y = x|x - 2|$  را رسم می‌کنیم تا ببینیم کدام بازه نزولی است:



با توجه به شکل رسم‌شده تابع در بازه  $[1, 2]$  نزولی است، ضابطه تابع وارون را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq 2 &\Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow y - 1 = -(x - 1)^2 \\ \Rightarrow (x - 1)^2 &= 1 - y \xrightarrow{\text{چندر}} |x - 1| = \sqrt{1 - y} \\ \xrightarrow{1 < x < 2} x - 1 &= \sqrt{1 - y} \Rightarrow x = \sqrt{1 - y} + 1 \\ \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y &= \sqrt{1 - x} + 1 \end{aligned}$$

پس ضابطه تابع وارون در این بازه برابر است با:  $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x}$ ،  $0 \leq x \leq 1$ . البته در گزینه‌ها، بازه‌های جواب به صورت باز آمده‌اند.

$$\Rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \Rightarrow \frac{2^{2x} + 1}{2^x} = 4 \Rightarrow 2^{2x} + 1 = 4 \times 2^x$$

$$\Rightarrow 2^{2x} - 4 \times 2^x + 1 = 0$$

حالا باید معادله نهایی به دست آمده را حل کنیم. اگر فرض کنیم  $2^x = t$  داریم:

$$(t^2)^2 - 4(t^2) + 1 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta \text{ روش}} t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(1)}}{2(1)} \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

حالا چون باید  $x > 0$  باشد، پس  $2^x$  باید بزرگتر از ۱ شود؛ یعنی  $x = \log_2 2 + \sqrt{3}$  پس در نتیجه:

**راه II** چون  $x > 0$  است، پس گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند

(چون  $2 - \sqrt{3}$  و  $1 - \sqrt{3}$  هر دو بین صفر و یکاند و لگاریتمشان منفی است).

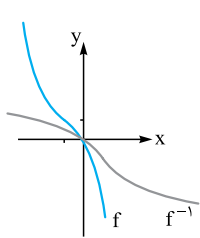
بنابراین می‌ماند ۳ و ۴ که در معادله امتحان‌شان می‌کنیم:

$$x = \log_2(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow \frac{2^{\log_2(\sqrt{3} + 1)} + \frac{1}{2^{\log_2(\sqrt{3} + 1)}}}{2} = 2 \quad \text{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3} + 1}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3} + 1 = 8 \quad \times$$

پس ۳ هم نادرست است و جواب می‌شود ۴ یعنی  $x = \log_2(2 + \sqrt{3})$ .



نمودار تابع  $y = -(x+1)^2 + 1$  و نمودار تابع معکوسش را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم؛ همان‌طور که می‌بینیم منحنی تابع و وارونش یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

**۴۷۰. گزینه ۲ راه I** تابع  $f(x) = \sqrt{x+2}$  صعودی اکید است،

پس تابع وارونش را باید روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع کند؛ یعنی در نقطه  $(a, a)$ ، پس می‌توانیم گزینه‌ها را امتحان کنیم: (هر عددی به  $x$  بدهیم  $y$  هم

باید همان شود.)  $x = -1 \Rightarrow y = \sqrt{-1+2} = 1 \quad \times$  **۱**

$x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2+2} = 2 \quad \checkmark$  **۲**

پس جواب ۲ است.

**راه II** چون سؤال گفته نقطه تلاقی تابع  $f(x) = \sqrt{x+2}$  با نمودار

معکوس آن و  $f$  اکیداً صعودی است، پس این نقطه روی نیمساز ناحیه اول و سوم

قرار دارد پس تابع را با نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{توان}} x^2 = x+2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 & \text{چون } x \geq 0 \\ x = 2 & \text{قق} \end{cases} \text{ غقیق}$$

**۴۷۱. گزینه ۱** چون نمودار تابع  $f$  و نمودار وارونش یعنی  $f^{-1}$  در نقطه

$(1, 2)$  یکدیگر را قطع می‌کنند پس نقطه  $(1, 2)$  در ضابطه هر دو صدق

می‌کند، یعنی  $f(1) = 2$  و  $f^{-1}(1) = 2$  و در نتیجه  $f^{-1}(2) = 1$  و  $f(2) = 1$ .

$$x > 0 \Rightarrow y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x^2, x > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{-x} \Rightarrow y^2 = -x$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -x^2, x < 0$$

پس تابع وارون برابر است با  $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$  و از بین گزینه‌ها

۴ برابر  $f^{-1}$  است.

**۴۶۵. گزینه ۱ عددگذاری** نقطه  $(0, 0)$  روی منحنی تابع  $y = \frac{x}{1+|x|}$

قرار دارد پس  $(0, 0)$  باید در  $f^{-1}$  هم صدق کند که با بررسی گزینه‌ها جواب می‌شود ۱.

**راه II** ضابطه تابع را به ازای  $x$ ‌های مثبت و منفی جدا می‌کنیم و در هر

کدام، تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow$$

$$\text{الف) } x \geq 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x(1-y) = y$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x}{1-x}$$

$$\text{ب) } x < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow x(1+y) = y$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x}{1+x}$$

از طرفی با توجه به محدوده  $x$  در خود تابع در مورد تابع وارون داریم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{1+x} & -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1$$

**۴۶۶. گزینه ۱ عددگذاری** در  $f(x) = 2^x - 1$  به ازای  $x = 1$  داریم

$y = 1$  و در گزینه‌ها نقطه  $(1, 1)$  فقط در گزینه‌های ۱ و ۳ صدق می‌کند.

به ازای  $x = 3$  داریم  $y = 7$ ، پس باید  $(7, 3)$  در تابع معکوس صدق کند

و ۱ صحیح است.

**راه II**  $x$  را بر حسب  $y$  پیدا می‌کنیم:  $2^x = y + 1 \Rightarrow x = \log_2(y + 1)$

$$\xrightarrow{a = \log_c b \Leftrightarrow b = a^c} x = \log_2(y + 1)$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} y = \log_2(x + 1)$$

**۴۶۷. گزینه ۲ راه I** داریم:  $f(x) = \log_{10}(x-1) - 3$ ، برای

پیدا کردن ضابطه تابع وارون  $x$  را بر حسب  $y$  پیدا می‌کنیم:

$$y = \log_{10}(x-1) - 3 \Rightarrow y + 3 = \log_{10}(x-1)$$

$$\Rightarrow x - 1 = 10^{y+3} \Rightarrow x = 10^{y+3} + 1$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 10^{x+3} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{x+3} + 1$$

روی نمودار  $f(x) = \log_{10}(x-1) - 3$  اگر  $x = 2$  باشد:

$$y = \log_{10} 1 - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow (2, -3) \in f$$

پس نقطه  $(-3, 2)$  باید روی نمودار  $f^{-1}$  قرار داشته باشد که فقط در ۲

یعنی  $f^{-1}(x) = 10^{x+3} + 1$  صدق می‌کند.

**۴۶۸. گزینه ۴ راه I**  $f^{-1}(2)$  یعنی در تابع وارون  $x$  برابر ۲ است،

پس در خود تابع باید  $y = 2$  باشد:

$$2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2$$

**۴۷۶. گزینه ۴** اگر نمودار تابع  $f^{-1}$  خط  $g(x) = \frac{x-9}{2}$  در نقطه‌ای به

طول  $\alpha$  قطع کند، نمودار خود تابع  $f$  خط قرینه خط  $y = \frac{x-9}{2}$  نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم را در نقطه‌ای به عرض  $\alpha$  قطع می‌کند، پس اول قرینه

خط  $y = \frac{x-9}{2}$  را پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} x = \frac{y-9}{2} \Rightarrow y-9 = 2x$$

$$\Rightarrow y = 2x + 9$$

حالا خط  $y = 2x + 9$  را با نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = 2x + 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 2x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-6) = 0$$

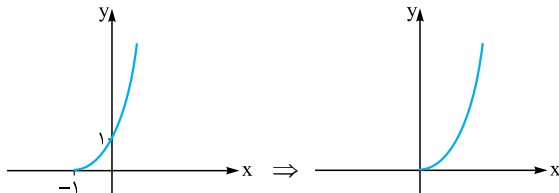
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غلقق (چون } x \geq 1 \text{ است)} \\ x = 6 & \text{قق} \end{cases}$$

حالا مقدار عرض نقطه را به ازای  $x = 6$  پیدا می‌کنیم:

$$x = 6 \Rightarrow y = 2(6) + 9 = 21 \Rightarrow \alpha = 21$$

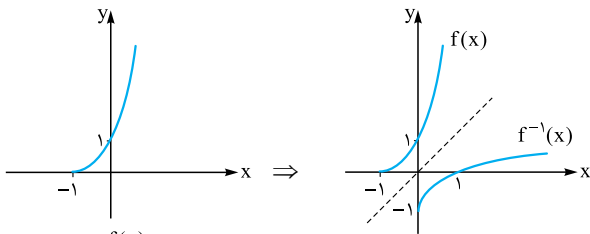
**۴۷۷. گزینه ۴** داریم  $f(x) = (x+1)^2$  پس  $f(x-1) = x^2$  از طرف

دیگر برای رسم  $f^{-1}(-x)$  اول نمودار  $f(x)$  و سپس نمودار تابع  $f^{-1}(x)$  یعنی قرینه نمودار نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم را رسم می‌کنیم و بعد نمودار  $f^{-1}(-x)$  یعنی قرینه نمودار تابع  $f^{-1}(x)$  را نسبت به محور  $y$ ها می‌کشیم: (در تمام این‌ها حواسمان هست که دامنه تابع  $x > -1$  است.)



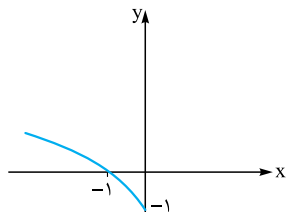
$y = f(x)$

$y = f(x-1)$

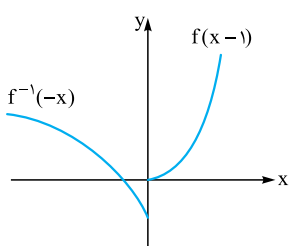


$y = f(x)$

$y = f^{-1}(x)$



$y = f^{-1}(-x)$



حالا نمودار  $f(x-1)$  و  $f^{-1}(-x)$  را در یک دستگاه رسم می‌کنیم: دو نمودار یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند.

**۴۷۲. گزینه ۱** نمودار تابع  $f$  و تابع وارونش یعنی  $f^{-1}$  در نقطه  $(1, 2)$

مقطع‌اند، پس  $(1, 2)$  هم روی نمودار  $f$  است و هم روی نمودار  $f^{-1}$ . در نتیجه نقطه  $(2, 1)$  هم روی نمودار  $f$  است و هم روی نمودار  $f^{-1}$ ، بنابراین:

$$f(x) = \sqrt{ax+b}$$

$$\begin{cases} (1, 2) \Rightarrow 2 = \sqrt{a+b} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ 2a+b=1 \end{cases} \\ (2, 1) \Rightarrow 1 = \sqrt{2a+b} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} -a = 3 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 7$$

بنابراین:  $a - b = -10$ .

**۴۷۳. گزینه ۳** می‌دانیم تابع‌های چندجمله‌ای درجه زوج (با دامنه  $\mathbb{R}$ ) هرگز یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیستند. بنابراین برای این که تابع

جمله  $x^4$  حذف شود یعنی  $a = -1$  جمله  $f(x) = (a+1)x^4 + (a+2)x^3 + (a+4)x^2 + 3x$  وارون‌پذیر باشد، باید

پس ضابطه تابع  $f$  برابر است با  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ ، حالا باید تعداد نقاط برخورد منحنی تابع  $f$  را با خط  $x = y$  حساب کنیم:

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 3x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x = x$$

$$\Rightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

پس منحنی تابع، خط  $y = x$  را در سه نقطه قطع می‌کند.

**۴۷۴. گزینه ۳** می‌دانیم نمودار تابع  $f^{-1}$  و  $f$  نسبت به خط  $y = x$  قرینه‌اند، پس اگر نمودار  $f^{-1}$  خط  $y = x - 2$  را در نقطه  $(\alpha, \beta)$  قطع کند، نمودار  $f$  خط قرینه خط  $y = x - 2$  نسبت به نیمساز را، در نقطه  $(\beta, \alpha)$  قطع می‌کند. پس قرینه خط  $y = x - 2$  را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم پیدا می‌کنیم و با  $f$  قطع می‌دهیم:

$$y = x - 2 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} x = y - 2 \Rightarrow y = x + 2$$

حالا خط  $y = x + 2$  را با تابع  $f(x) = x^3 + x + 1$  قطع می‌دهیم:

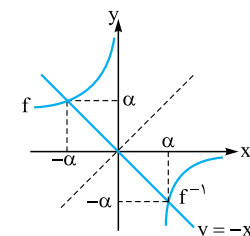
$$\begin{cases} y = x^3 + x + 1 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + x + 1 = x + 2 \Rightarrow x^3 = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{روی } y = x + 2 \text{ است}} y = 3$$

پس نقطه  $(\beta, \alpha)$  همان  $(1, 3)$  است؛ یعنی  $\beta = 1$  و  $\alpha = 3$  و در نتیجه  $\alpha + \beta = 4$ .

**۴۷۵. گزینه ۲** اگر نمودار تابع  $f^{-1}$

نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه  $(\alpha, -\alpha)$  قطع کند، نمودار خود تابع، نیمساز ناحیه دوم را در نقطه  $(-\alpha, \alpha)$  قطع می‌کند (به شکل فرضی که کشیده‌ایم، نگاه کنید).



پس نمودار تابع  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  را با نیمساز ناحیه دوم یعنی  $y = -x$  قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x - \frac{2}{x} \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x - \frac{2}{x} = -x \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{x} = -x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 = -x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه دوم}} \begin{cases} x = 1 & \text{غلقق} \\ x = -1 & \text{قق} \end{cases}$$

پس  $-\alpha = -1$  و در نتیجه  $\alpha = 1$ .

۴۸۵. گزینه ۱ | اول با توجه به این که  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$

و  $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$  را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$$

حالا  $g$  و  $\text{gof}^{-1}$  را در نظر می‌گیریم و  $\frac{g}{\text{gof}^{-1}}$  را پیدا می‌کنیم:

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$$

$$\text{gof}^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$\Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(4, \frac{2}{3}), (5, \frac{6}{3})\} = \{(4, 2), (5, 2)\}$$

۴۸۶. گزینه ۴ | در درس نامه داشتیم:

پس بهتر است اول  $f \circ g$  و بعد وارونش را پیدا کنیم:

$$f = \{(0, -1), (2, \frac{1}{2}), (-3, \sqrt{2}), (1, 5)\}$$

$$g = \{(-1, -3), (5, 2), (\frac{1}{2}, 0), (4, 6)\}$$

$$f \circ g = \{(-1, \sqrt{2}), (5, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -1)\}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)^{-1} = \{(\sqrt{2}, -1), (\frac{1}{2}, 5), (-1, \frac{1}{2})\}$$

پس جواب می‌شود ۴.

۴۸۷. گزینه ۴

می‌دانیم  $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = (f \circ g)^{-1}(a)$  پس  $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = (f \circ g)^{-1}(a)$

حالا اگر فرض کنیم  $(f \circ g)^{-1}(a) = a$  داریم  $(f \circ g)(a) = a$ ، پس:

$$(f \circ g)(a) = a \Rightarrow f(g(a)) = a$$

$$\frac{f(x) = \frac{2}{5}x - 4}{\Delta} \rightarrow \frac{2}{\Delta}g(a) - 4 = a \Rightarrow \frac{2}{\Delta}g(a) = a + 4$$

$$\Rightarrow g(a) = \frac{12 \times 5}{2} = 30. \quad \frac{g(x) = x^2 + x}{\Delta} \rightarrow a^2 + a = 30$$

$$\xrightarrow{\text{عددگذاری}} a = 3$$

۴۸۸. گزینه ۲ | چون داریم:

پس  $(f \circ g)^{-1}(a) = a$  و در نتیجه  $(f \circ g)(a) = a$ ، بنابراین برای پیدا کردن

مقدار  $a$  باید  $(f \circ g)(a) = a$  را پیدا کنیم:

$$f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$$

$$g(x) = \sqrt{5x + 9}$$

$$a = (f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(\sqrt{40 + 9}) = f(7) = 3$$

۴۸۹. گزینه ۳ | می‌دانیم:

پس برای پیدا کردن مجموع ریشه‌های معادله  $(f \circ g)^{-1}(x) = 0$  باید اول

معادله  $(f \circ g)(x) = 0$  را تشکیل دهیم:

$$f(x) = x + 2 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$$

$$g(x) = 2x^2 - 8x + 1$$

معادله  $(g \circ f^{-1})(x) = 0$  را تشکیل می‌دهیم:

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 1 - 8(x - 2) + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 25 = 0$$

و چون مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم برابر  $-\frac{b}{a}$  است، پس مجموع

$$r_1 + r_2 = -\frac{-16}{2} = 8$$

دقت کنید که  $\Delta = (-16)^2 - 4(25) > 0$  و دو ریشه حقیقی وجود دارند.

۴۷۸. گزینه ۱ | گفتیم  $(f \circ f^{-1})(x) = x$  پس تابع  $f \circ f^{-1}$  از زوج

مرتبه‌هایی تشکیل شده است که  $x$  و  $y$  شان برابر است و فقط باید دامنه  $f \circ f^{-1}$

را پیدا کنیم:

$$D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$$

و چون  $f = \{(1, 2), (2, 3)\}$  پس  $R_f = \{2, 3\}$  و در نتیجه:

۴۷۹. گزینه ۲ | چون  $(f \circ g)(x) = x$  پس  $g = f^{-1}$  و در نتیجه:

$$f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1} = g = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

**نکته** البته  $g$  می‌تواند زوج‌های مرتب دیگری به شکل  $(a, b)$

داشته باشد. فقط نباید ۱ و ۲ و ۳ باشد. به همین دلیل این جواب، تنها

انتخاب  $g$  نیست، مثلاً  $g = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 8)\}$  هم قابل

قبول است.

۴۸۰. گزینه ۳ | با توجه به ماشین  $x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow x$  داریم

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{پس } g = f^{-1}$$

$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$g(0) = f^{-1}(0) \Rightarrow 0 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۴۸۱. گزینه ۴ | می‌دانیم همواره  $(f \circ f^{-1})(x) = x$  است و برای رسم

نمودار تابع  $(f \circ f^{-1})(x) = x$  فقط باید دامنه  $f \circ f^{-1}$  را پیدا کنیم. طبق آنچه در

درس نامه گفتیم:

پس  $(f \circ f^{-1})(x) = x$  یعنی همان خط  $y = x$  که

دامنه‌اش برابر برد  $f$  یعنی بازه  $[1, 2]$  است که نمودارش

می‌شود:

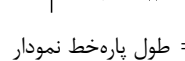


۴۸۲. گزینه ۱ | گفتیم  $f \circ f^{-1}(x) = x$  همان

$y = x$  است فقط دامنه آن، برد  $f$  است. در این جا

$f$  اکیداً صعودی است پس برد آن با دامنه  $[-1, 1]$  به

صورت  $[f(-1), f(1)]$  یعنی  $[4, 8]$  خواهد بود.



$$\text{طول پاره خط نمودار} = \sqrt{(4-8)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۴۸۳. گزینه ۲ | می‌دانیم:

پس دامنه تابع  $y = \sqrt{1 + (f^{-1} \circ f)(x)}$  برابر است با دامنه تابع  $y = \sqrt{1+x}$

به شرط آن که  $f^{-1} \circ f$  تعریف شده باشد. یعنی  $x \in D_{f^{-1} \circ f}$  و چون

$D_{f^{-1} \circ f} = D_f$  پس دامنه تابع  $y = \sqrt{1 + (f^{-1} \circ f)(x)}$  برابر می‌شود با:

$$\text{دامنه} = \{1+x \geq 0 \mid x \in D_f\}$$

از طرف دیگر دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{1-x}$  برابر است با  $x \leq 1$  پس:

$$\text{دامنه} = \{x \geq -1 \mid x \leq 1\} = [-1, 1]$$

۴۸۴. گزینه ۱ | می‌دانیم:

پس اول باید حاصل  $g^{-1}(4)$  را پیدا کنیم:

$$g(x) = \frac{5x+2}{2x-1} \Rightarrow 4 = \frac{5x+2}{2x-1} \Rightarrow 8x-4 = 5x+2$$

$$\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow g^{-1}(4) = 2$$

$$f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(g^{-1}(4)) = f(2) = 4 + 2 = 6$$





پس در  $g(1+\sqrt{2}) = 1$  باید  $g(1+\sqrt{2}) = k(1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}})$  باشد:

$$= k(1+\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}) = k(1+\sqrt{2} - (\sqrt{2}-1)) = 2k$$

مخرج را گویا می‌کنیم

$$\Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

**راه II** گفتیم باید  $fog(x) = x$  و  $gof(x) = x$  باشند، پس داریم:

$$gof(x) = g(f(x))$$

به جای  $x$  در  $g$  باید  $f(x)$  قرار دهیم.

$$k(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}})$$

$$= k \frac{(x + \sqrt{x^2+1})^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = k \frac{x^2 + x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1} - 1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= k \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} = k \frac{2x(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = k(2x) = x$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

**۴۹۶. گزینه ۴** تابع  $f(x) = \frac{x-3}{2} + 2\sqrt{x}$  یک تابع اکیداً صعودی

است چون تابع‌های  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  و  $y = 2\sqrt{x}$  هر دو اکیداً صعودی‌اند، پس نقطه برخورد تابع  $f$  و تابع وارونش روی نیمساز ناحیه اول و سوم متقاطع‌اند:

$$\begin{cases} y = \frac{x-3}{2} + 2\sqrt{x} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{2} + 2\sqrt{x} = x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = x - \frac{x-3}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x} = x+3 \xrightarrow{\text{توان } 2} 16x = x^2 + 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = 9 \end{cases}$$

پس دو نمودار در نقاط  $A(1,1)$  و  $B(9,9)$  متقاطع‌اند که فاصله آن‌ها می‌شود:

$$AB = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

**۴۹۷. گزینه ۴** ضابطه تابع وارون تابع

$$f(x) = x + 4\sqrt{x} + 8 \text{ را پیدا می‌کنیم:}$$

$$y = x + 4\sqrt{x} + 8 \Rightarrow y = (\sqrt{x} + 2)^2 + 4$$

$$\Rightarrow y - 4 = (\sqrt{x} + 2)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 2 = \sqrt{y-4} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y-4} - 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x = y - 4 - 4\sqrt{y-4} + 4$$

$$\Rightarrow x = y - 4\sqrt{y-4} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x - 4\sqrt{x-4}$$

حالا با مقایسه  $f^{-1}(x) = x - a\sqrt{x-b}$  و  $f^{-1}(x) = x - 4\sqrt{x-4}$  نتیجه

می‌گیریم  $a = 4$  و  $b = 4$ . از طرفی دیگر در شرط  $x \geq c$  (یعنی دامنه  $f^{-1}$ ) برای پیدا کردن مقدار  $c$  باید برد  $f$  را پیدا کنیم:

$$f(x) = (\sqrt{x} + 2)^2 + 4 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 + 4 \geq 8 \Rightarrow f \text{ برد } y \geq 8$$

بنابراین باید  $c = 8$  باشد و در نتیجه:  $a + b + c = 4 + 4 + 8 = 16$

**راه II** دو تابع را ترکیب کنیم و مساوی  $x$  بگذاریم:

**۴۹۰. گزینه ۴** می‌دانیم  $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ ، پس اگر اول

$(g^{-1}of^{-1})(x)$  را پیدا کنیم (که همان  $(fog)^{-1}$  است) و بعد وارونش را پیدا کنیم، ضابطه  $fog$  را حساب کرده‌ایم، بنابراین:

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow (g^{-1}of^{-1})(x) = (1 + \sqrt{x})^2$$

$$(fog)^{-1}(x) = (1 + \sqrt{x})^2$$

پس داریم:

$$y = (1 + \sqrt{x})^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y} = 1 + \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} x = 1 - 2\sqrt{y} + y$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

پس ضابطه  $fog$  برابر است با:

$$(fog)(x) = x + 1 - 2\sqrt{x}$$

**۴۹۱. گزینه ۳** داریم:

$$f = \{(2, 3), (-1, 2), (-4, 1), (3, 0)\}$$

$$g = \{(0, 2), (2, -4), (3, 2), (-4, -2)\}$$

حالا مقدار  $(fogof^{-1})(3)$  را به ترتیب پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow g(f^{-1}(3)) = g(2) = -4$$

$$\Rightarrow f(g(f^{-1}(3))) = f(-4) = 1$$

**۴۹۲. گزینه ۴** این تابع از ترکیب  $f(x) = 3x - 1$  و  $g(x) = 3x - 1$

به صورت  $fog$  ساخته شده است. پس وارونش می‌شود:

$$(fog)^{-1}(x) = g^{-1}of^{-1}(x)$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

وارون  $g(x)$  را بلدیم:

$$g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{f^{-1}(x)+1}{3}$$

پس:

**راه II** می‌نویسیم  $y = f(3x - 1)$ . حالا جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم:

$$x = f(3y - 1)$$

برای تنها کردن  $y$ ، از دو طرف  $f^{-1}$  می‌گیریم:

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(f(3y - 1)) = 3y - 1 \Rightarrow y = \frac{f^{-1}(x)+1}{3}$$

همدیگر را از بین می‌برند

**۴۹۳. گزینه ۴** داریم

$$g^{-1}(a) = 1 \Rightarrow g^{-1}(a) = 1 \text{ و } f^{-1}(5) = 3, g(x) = f(2x+1)+1$$

می‌گیریم  $g(1) = a$ ، پس:

$$g(x) = f(2x+1)+1 \Rightarrow g(1) = a \Rightarrow f(3)+1 = a$$

از طرفی دیگر چون  $f^{-1}(5) = 3$ ، پس  $f(3) = 5$ ، بنابراین:

$$f(3)+1 = a \Rightarrow 5+1 = a \Rightarrow a = 6$$

**۴۹۴. گزینه ۱** می‌دانیم  $(fof^{-1})(x) = x$ ، پس در تابع

$$f(x) = x + [x] \text{ به ازای } x \text{ های عضو برد } f, \text{ داریم:}$$

$$(fof^{-1})(4/5) = 4/5$$

**نکته** در این تابع  $f(2/5)$  می‌شود  $4/5$ ؛ پس عدد  $4/5$  در

برد  $f$  (و دامنه  $f^{-1}$ ) بود. اما مثلاً اگر همین سؤال  $fof^{-1}(5/5)$  را

بخواهد جواب **۴** است یعنی موجود نیست. چون عدد  $5/5$  در برد تابع

$y = x + [x]$  قرار ندارد. راستش را بخواهید برد تابع  $y = x + [x]$  از

بازه‌های  $[2k, 2k+1)$  ساخته شده است. ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**۴۹۵. گزینه ۴** **راه I** در تابع  $f$  داریم:

$$f(1) = 1 + \sqrt{1}$$



و  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$  و مقدار  $g^{-1}(6)$  را می‌خواهیم:

$$\begin{cases} g^{-1}(6) = a \Rightarrow g(a) = 6 \\ g(a) = f(a) + \sqrt{f(a)} \end{cases} \Rightarrow f(a) + \sqrt{f(a)} = 6$$

تساوی  $f(a) + \sqrt{f(a)} = 6$  یک معادله است و اگر فرض کنیم  $t = \sqrt{f(a)}$

$$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases} \text{ داریم:}$$

و چون  $t = \sqrt{f(a)}$ ، پس فقط مقدار  $t = 2$  قابل قبول است؛ یعنی:

$$\sqrt{f(a)} = 2 \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow a = f^{-1}(4)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{2(4)} = \sqrt[3]{8} = 2$$

**۵۰۱. گزینه ۴ | راه I** در رابطه  $g(x) = f(2x+5)$  کاری می‌کنیم

که  $f(-1)$  ساخته شود! چه کاری؟ به جای  $x$  می‌گذاریم  $-3$ . پس:

$$\xrightarrow{x=-3} g(-3) = f(-1)$$

حالا در صورت سؤال به جای  $f(-1)$  می‌گذاریم  $g(-3)$  و داریم:

$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1))) = f^{-1}(g^{-1}(g(-3)))$$

$$\xrightarrow{g^{-1}(g(x))=x} = f^{-1}(-3)$$

پس در ضابطه  $f^{-1}$  باید  $-3$  قرار دهیم:

$$f^{-1}(-1) = \frac{(-3)^2}{9} + \sqrt[3]{(-3) \times 9} = -6$$

از رابطه  $g(x) = f(2x+5)$  می‌توانیم بنویسیم:

$$g(x) = f(2x+5) \Rightarrow x = g^{-1}(f(2x+5))$$

حالا  $f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$  را می‌خواهیم. پس در تساوی  $x = g^{-1}(f(2x+5))$

به جای  $x$  باید عددی بگذاریم که  $2x+5 = -1$  شود، یعنی  $x = -3$ :

$$x = -3 \Rightarrow -3 = g^{-1}(f(-1))$$

حالا مقدار  $f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$  به راحتی به دست می‌آید:

$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1))) = f^{-1}(-3) = \frac{(-3)^2}{9} + \sqrt[3]{9 \times (-3)}$$

$$= -\frac{27}{9} - 3 = -6$$

**۵۰۲. گزینه ۱ | راه I** نمودار تابع را رسم

می‌کنیم: (برای رسم از بازه  $[-2, 3]$  استفاده

می‌کنیم.)  $f(x) = \left| \frac{3}{2}x - 1 \right| + 1$

$$\left(-2, 5\right), \left(\frac{2}{3}, 1\right), \left(3, \frac{9}{2}\right)$$

حالا با توجه به نمودار، برد تابع برابر است با  $[1, 5]$ .

**راه II** به ازای  $2 < x \leq 3$  داریم:

$$-3 < \frac{3}{2}x \leq \frac{9}{2}$$

پس  $1 \leq \frac{3}{2}x - 1 < 4$  و قدر مطلق آن بین صفر و ۴ خواهد بود.

$$0 + 1 \leq \left| \frac{3}{2}x - 1 \right| + 1 < 4 + 1$$

یعنی برد تابع با این دامنه به صورت  $[1, 5]$  است.

**۵۰۳. گزینه ۲** نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & x > 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = x - a\sqrt{x-b}$$

$$f(x) = (\sqrt{x+2})^2 + 4$$

$$(\sqrt{x+2})^2 + 4 - a\sqrt{(\sqrt{x+2})^2 + 4} - b = x \quad \text{ترکیب کنیم:}$$

$$\Rightarrow x + 4\sqrt{x+2} + 8 - a\sqrt{x+4\sqrt{x+2}+8} - b = x$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x+2} + 8 = a\sqrt{x+4\sqrt{x+2}+8} - b$$

$$\xrightarrow{\frac{a=4}{\div 4}} \sqrt{x+2} = \sqrt{x+4\sqrt{x+2}+8} - b$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x + 4\sqrt{x+2} + 4 = x + 4\sqrt{x+2} + 8 - b \Rightarrow b = 4$$

$c$  شروع برد  $f$  است که چون  $f$  همواره صعودی است، داریم:

$$f(x) = x + 4\sqrt{x+2} \quad D_f = [0, +\infty)$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی}} R_f = [f(0), f(+\infty)) \Rightarrow c = f(0) = 8$$

**۴۹۸. گزینه ۱ | عددگذاری** در تابع  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$  داریم

$f(1) = \frac{1}{3}$  پس در تابع وارون باید  $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$  باشد که فقط در **۱** یعنی

$$y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$$
 صدق می‌کند.

**راه II** از ترکیب دو تابع  $g(x) = 2^x$  و  $h(x) = \frac{x-1}{x+1}$  ساخته شده

که وارون آن‌ها  $g^{-1}(x) = \log_2 x$  و  $h^{-1}(x) = \frac{-x-1}{x-1}$  است. پس داریم:

$$f^{-1} = (h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1} = \log_2 \frac{-x-1}{x-1} = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$$

**راه III** داریم  $x, y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$  را برحسب  $y$  پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \Rightarrow y(2^x + 1) = 2^x - 1 \Rightarrow 2^x - y(2^x) = y + 1$$

$$\Rightarrow 2^x(1-y) = y+1 \Rightarrow 2^x = \frac{y+1}{1-y}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق تعریف لگاریتم}} x = \log_2 \frac{y+1}{1-y}$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \log_2 \frac{x+1}{1-x}$$

پس تابع وارون  $y = \log_2 \frac{x+1}{1-x}$  است.

**۴۹۹. گزینه ۳ | عددگذاری** در  $f(x) = 5^{\log_x 5}$  به ازای  $x = 25$

داریم  $y = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$  پس در تابع وارون باید به ازای  $x = \sqrt{5}$  داشته باشیم

$y = 25$  که فقط در **۳** یعنی  $y = 5^{\log_x 5}$  صدق می‌کند.

**راه II** از رابطه  $y = 5^{\log_x 5}$  مقدار  $x$  را برحسب  $y$  پیدا می‌کنیم. برای این

کار از طرفین (در مبنای ۵) لگاریتم می‌گیریم:

$$y = 5^{\log_x 5} \Rightarrow \log_5 y = \log_5 5^{\log_x 5}$$

$$\Rightarrow \log_5 y = \log_x 5 \log_5 5 \Rightarrow \log_x 5 = \log_5 y$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} x^{\log_5 y} = 5$$

$$\Rightarrow (x^{\log_5 y})^{\log_y 5} = 5^{\log_y 5} \Rightarrow x = 5^{\log_y 5}$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 5^{\log_x 5}$$

**۵۰۰. گزینه ۲** مثل سؤال قبل، داریم:

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$$